Les suites

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Mode de génération et sens de variation

- Activités
- Cours
- Exercices

2. Suites arithmétiques

- Activités
- Cours
- Exercices

3. Suites géométriques

- Activités
- Cours
- Exercices

4. Notion de limite et recherche de seuils

- Activités
- Cours
- Exercices

Les suites : Modes de génération et sens de variation

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Activité. Trouver la suite.

0 – 1 – 4 – 9 – ...

0 – 1 – 3 – 6 – 10 – …

0 – 0,5 – $\frac{2}{3}$ – 0,75 – …

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – ...

1 – 2 – 4 – 7

Activité. Une suite de Syracuse est une suite de nombres obtenue ainsi :

« On choisit un nombre entier naturel différent de 0, n'importe lequel.
S'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on la multiplie par 3 et on ajoute 1.
Puis on recommence avec le nombre obtenu et ainsi de suite.. à l'infini. »

1. Avec 3 comme nombre de départ, on obtient ceci : 3 10 5 16 8 4 2 1 4 2 1 4 2 1… (dans ce cas, on peut s'arrêter au 1^{er} « 1 »)
Écrire la suite obtenue avec 7 comme nombre de départ.

2. On peut numéroter les termes de la suite, en commençant à 0 pour le premier terme.
En notant u la suite de Syracuse commençant par 3, on écrit :

$$u_0 = 3, u_1 = 10, u_2 = 5, u_3 = 16, u_4 = 8, u_5 = 4, u_6 = 2, u_7 = 1$$

Écrire les premiers termes de la suite de Syracuse que l'on notera v, obtenue avec 32 comme nombre de départ.

3. On appelle altitude maximale la plus grande valeur, si elle existe, obtenue par la suite.
Quelle est l'altitude maximale de la suite u définie à la question 2, et pour quel indice est-elle obtenue ?

4. On appelle la durée de vol, si elle existe, le plus petit indice n tel que $u_n = 1$.
Quelle est la durée de vol de la suite u ?
Peut-on savoir si la suite de Syracuse w obtenue avec $w_0 = 7$ semble avoir une durée de vol ?

5. Existe-il une suite de Syracuse de premier terme inférieur à 20 dont la durée de vol ne semble pas exister ? Et pour la suite de Syracuse dont le premier terme est 27 ?

Vidéo maths et tiques

Les suites : Modes de génération et sens de variation

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Tout commence par un simple jeu : trouver la suite. Par exemple : 0 – 1 – 4 – 9 – … . Ou encore : 1 – 2 – 4 – 7 – … .
Ces suites sont définies par une certaine logique qu'il faut trouver, c'est en cela que réside le jeu.

Et puis voilà que quelqu'un sort du jeu et se demande : mais c'est quoi en fait une suite ? Ce sont des nombres qui se suivent, autrement dit un ensemble de nombres. Mais c'est pas assez précis. Les nombres se suivent, donc ils ont un ordre, c'est un ensemble ordonné de nombres. C'est mieux, mais il manque une idée : ça ne s'arrête pas. C'est donc un ensemble infini et ordonné de nombres. N'importe quels nombres ? À priori oui, pas de restriction : **une suite est un ensemble infini et ordonné de nombres réels**. C'est pas mal ça. On a dépassé largement le cadre du jeu. On voit naître un nouvel objet mathématique. Son nom est « suite », « suite de nombres réels » pour être précis.

La réflexion sur ce nouvel objet se poursuit : ordonné, ça veut dire quoi exactement ? Qu'il y a un premier, puis un deuxième, puis… Ok, on a compris. On peut leur donner un numéro en gros. Ah mais oui, il faudrait pouvoir les numéroter ces nombres, pour s'y retrouver.

Résumons le vocabulaire et les notations à inventer pour aller avec notre nouvel objet : il faudrait une notation pour l'objet lui-même, la suite (son nom, on l'a déjà) ; il faudrait un nom et une notation pour les éléments de la suite, les nombres ; et il faudrait en même temps une astuce pour que ces nombres soient numérotés, qu'on sache quel est le premier, quel le deuxième, quel est le huitième, etc…

I. Calculer les termes d'une suite

A. Définir une suite

La suite elle-même peut-être notée par une lettre comme u. On peut utiliser n'importe quelle lettre pour désigner une suite : u, v, w, a, b…
Les valeurs de la suite sont appelé ses termes et le numéro d'un terme est appelé son rang. On commence la plupart du temps à 0 ou à 1.
Chaque terme d'une suite u peut alors être noté u_n (notation du rang en indice) ou bien $u(n)$ (notation à la façon des fonctions).

Pour la suite des carrés parfaits, on peut numéroter à partir de 0 :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 4, \dots$$

et de façon générale, pour tout entier naturel n :

$$u_n = n^2$$

Si on avait numéroté à partir de 1, cela aurait donné : $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$ et de façon générale $u_n = (n-1)^2$, bien moins naturel et pratique.
En résumé :

Numérotation (Rang)	0	1	2	3	…	n	…
Suite u	$u_0 = 0$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 9$	…	$u_n = n^2$	…

Pour la suite de l'activité commençant par 1 – 2 – 4 – 7 – ..., on peut commencer par noter $u_1 = 1$ puis on a :

$$u_2 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$u_3 = u_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$
$$u_4 = u_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$
$$\dots$$

et on poursuit avec la règle de calcul suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + n$$

Cette règle peut aussi être écrite ainsi $u_n = u_{n-1} + (n-1)$ mais la précédente est un peu plus simple à utiliser.
En résumé :

Numérotation (Rang)	1	2	3	4	…	n	$n+1$	…
Suite u	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 4$	$u_4 = 7$	…	u_n	$u_{n+1} = u_n + n$	…

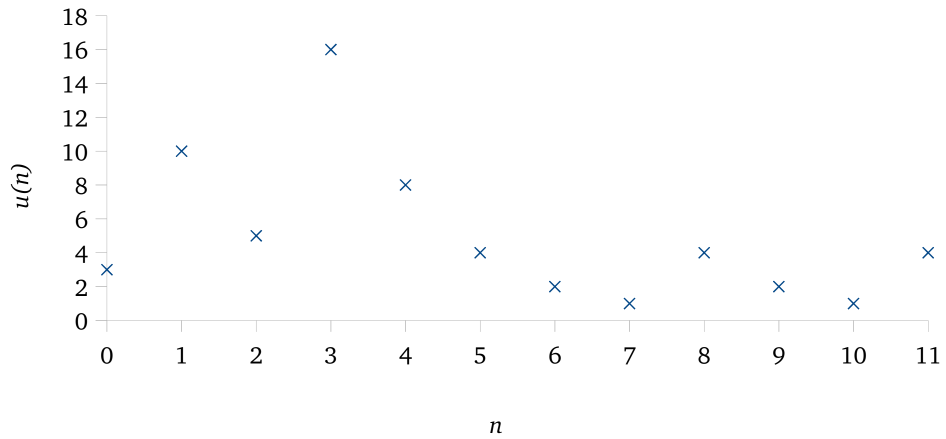
Mathématiquement, un suite est ainsi tout simplement une fonction qui, à tout entier naturel n, associe un nombre réel.

Définition. Une suite est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou à partir d'un certain entier).

B. Voir une petite suite c'est agréaAAble

On peut compléter notre découverte des suites avec une vision plus globale grâce à une représentation graphique : une suite étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, elle peut être représentée par un « nuage de points » (un ensemble de points) avec en abscisse le rang n et en ordonnée le terme de la suite de rang n.
Par exemple :

Représentation graphique de la suite de Syracuse commençant par 3.



C. D'un coup ou l'un après l'autre

Jusqu'ici, nous avons donc mis en évidence deux façons de définir précisément une suite :

- par une formule explicite (ou terme général) : u_n en fonction de n directement
  Chaque terme étant exprimé en fonction de n, on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement.

Exemple 1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 1$. Calculer u_2.
Méthode : pour calculer un terme d'une suite définie par son terme général, on peut remplacer n par l'indice du terme demandé.

- par une relation de récurrence : u_{n+1} en fonction de u_n
  Chaque terme étant exprimé en fonction du précédent, pour calculer un terme, il faut avoir calculé les précédents.

Exemple 2. La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n - 1$. Calculer v_2.
Méthode : pour calculer un terme d'une suite définie par une relation de récurrence,
on peut calculer dans l'ordre chacun des termes précédents.

On pourra rencontrer à l'occasion deux autres façons de définir une suite : par un algorithme ou un programme, et par des motifs géométriques. Mais ces deux façons s'apparente en réalité la plupart du temps à une définition par une relation de récurrence ou par un terme général.

II. Sur le sens de variations des suites

Une fonction peut être croissante sur un intervalle puis décroissante sur un autre. C'est plus simple avec les suites. Elles sont soit croissante (sous-entendu de partout), soit décroissante (sous-entendu de partout), soit ni l'un ni l'autre. Une suite est croissante si chaque terme est supérieur ou égal au précédent, décroissante si chaque terme est inférieur ou égal au précédent. On peut préciser un cas particulier : une suite est constante si tous ses termes sont identiques. On introduit alors la notion de monotonie pour indiquer qu'une suite est soit croissante, soit décroissante : celle-ci n'ayant pas de changement de variations, on dit qu'elle est monotone et on pourra apprécier la sensibilité de celui qui est à l'origine du choix du vocabulaire.

Définitions. Soit u une suite.
La suite u est croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite u est décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite u est strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
La suite u est constante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
Une suite monotone est une suite croissante ou une suite décroissante. Une suite strictement monotone est une suite strictement croissante ou une suite strictement décroissante.

Il y a donc, concernant les variations, uniquement trois types de suites :

- les suites croissantes
- les suites décroissantes
- et les suites qui ne sont pas monotones (elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes)

Si une suite admet comme termes consécutifs 10 puis 5, on en déduit que cette suite n'est pas croissante (mais elle peut être décroissante ou ne pas être monotone). De la même façon, si 2 et 7 sont deux termes consécutifs d'une suite, on peut en déduite qu'elle n'est pas décroissante.
En résumé, pour démontrer qu'une suite n'est pas croissante, ou qu'elle n'est pas décroissante, on peut utiliser deux termes consécutifs bien choisis.
Exemple 3. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 3$.

Maintenant, attention : si par exemple on connaît seulement les premiers termes d'une suite, disons 10 et 5, ou même 10, 5, 3, 2, et 1, peut-être que cette suite est décroissante mais peut-être qu'elle n'est pas monotone, si le terme suivant vaut 7 par exemple. Tout ce qu'on sait avec ces informations, c'est qu'elle n'est pas croissante. Pour prouver qu'une suite est croissante ou qu'elle est décroissante, il faut montrer que tous les termes (une infinité) sont rangés dans l'ordre croissant (ou décroissant) : il faut donc utiliser le calcul littéral, seul capable de permettre la comparaison de chaque terme (u_n) avec le suivant (u_{n+1}) pour tous les entiers n possibles.
En résumé, pour démontrer qu'une suite est croissante ou qu'elle est décroissante, on doit utiliser le calcul littéral et on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

- **comparer directement u_{n+1} et u_n** (voir les définitions)
- **étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$** ($u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ et $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$)

Exemple 4. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3 + 5n$.

- **si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1** (si $u_n > 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$)

Exemple 5. Étudier le sens de variation de la suite strictement positive u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n \times 0{,}8$.

Les suites : Modes de génération et sens de variation

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 3$. Calculer les trois premiers termes de cette suite. Étudier son sens de variation.

2. La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = -10$ et $v_{n+1} = v_n + 2$. Calculer les trois premiers termes de cette suite. Étudier son sens de variation.

Exercice 2

Un couple possède un compte bancaire qu'il utilise pour verser le 05 de chaque mois 225 € à son enfant. Le solde du compte était de 10 350 € au 1er janvier 2024. Cette situation peut naturellement être modélisée par une suite : dans la suite de l'exercice, on note u_n la somme, en euro, restant sur le compte après n mois. On a donc $u_0 = 10\,350$.

1. Donner u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En déduire le sens de variation de la suite u.
4. Quel fut le solde du compte au 1er janvier 2025 ?
5. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n. Vérifier que cette expression est cohérente avec les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

Exercice 3

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000°C. À la fin de la cuisson, on éteint le four et commence alors la phase de refroidissement. Pour un nombre entier naturel n, on note $T(n)$ la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T(0) = 1\,000$. La température $T(n)$ est calculée grâce à l'algorithme suivant :

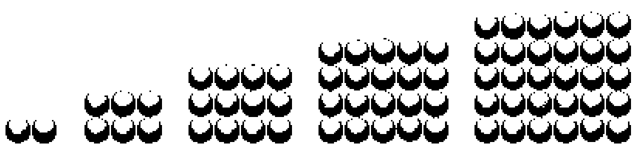
```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
    T ← 0.82 × T
```

1. Quelle est la température du four après une heure de refroidissement ? Et après 2 heures de refroidissement ?
2. Exprimer $T(n+1)$ en fonction de $T(n)$.
3. On admet que pour tout entier naturel n, $T(n) > 0$. Calculer $\dfrac{T(n+1)}{T(n)}$ et en déduire le sens de variation de la suite $(T(n))$.
4. La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $T(n) < 70$.

Exercice 4

Le premier motif est composé d'une rangée de deux billes, le deuxième de deux rangées de trois billes, le troisième de trois rangées de quatre billes, etc…

On considère, pour n entier naturel strictement positif, la suite (u_n) donnant le nombre de billes nécessaire à la réalisation de chaque motif : $u_1 = 2$, $u_2 = 6$ et $u_3 = 12$ …



Étudier la suite u. Que peut-on déterminer et prouver : calculs de termes, relation de récurrence, terme général, sens de variation ?

LES SUITES : SUITES ARITHMÉTIQUES

« La vie est un mystère qu'il faut vivre, et non un problème à résoudre. » Gandhi

Activité. Lors de la naissance de leur enfant, un couple ouvrit un compte solidaire (les intérêts sont versés à une association caritative) avec un versement initial de 1 000 €. Par la suite, ils ajoutèrent 1 100 € à son 1^{er} anniversaire, puis 1 200 € pour ses deux ans… en augmentant les sommes ajoutées de 100 € chaque année. Cette situation peut naturellement être modélisée par une suite : dans la suite de l'activité, on note u_n la somme, en euro, ajoutée au compte lors du $n^{\text{ième}}$ anniversaire. On a donc $u_0 = 1\,000$.

1. Donner u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle fut la somme ajoutée au compte pour les 10 ans de leur enfant ? Et pour ses 20 ans ?
4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
5. Leur enfant a clôturé ce compte juste après ses 20 ans. Quelle somme a-t-il reçue ?

Gauss et la somme des 100 premiers entiers

Les suites : Suites arithmétiques

« La vie est un mystère qu'il faut vivre, et non un problème à résoudre. » Gandhi

Les suites arithmétiques sont les plus simples des suites : la suite des nombres pairs (0, 2, 4, ...), celles des nombres impairs (1, 3, 5, ...), compter de trois en trois (3, 6, 9, ...), ou à rebours de cinq en cinq en partant de 100 (100, 95, 90, ...)… on les utilise sans le savoir depuis l'école primaire.

I. Définition

Une suite est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en additionnant toujours le même nombre.

Définition. Une suite u est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r s'appelle alors la raison de la suite arithmétique u.

Théorème. Une suite u est arithmétique s'il existe un réel r tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

Démonstration. En effet, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = r}$ est équivalent à $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut ainsi montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est un nombre réel fixe (qui ne dépend pas de n). *Il faut rester dans le cas général avec du calcul littéral.*

Exemple 1. La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n - 3$ est-elle arithmétique ?

Méthode : pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est un nombre fixe quelque soit n.

Et pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, on peut donc montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ n'est pas un nombre réel fixe : par exemple, on peut montrer que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ (la différence entre deux termes consécutifs change donc on ne passe pas d'un terme au suivant en additionnant le même nombre). *Il faut utiliser un contre-exemple numérique.*

Exemple 2. La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ est-elle arithmétique ?

Méthode : pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique,

on peut calculer ses premiers termes pour montrer que $u_{n+1} - u_n$ n'est pas un nombre fixe.

II. Terme général

Théorème. Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{et} \qquad u_n = u_1 + (n-1)\, r$$

Démonstration. Soit u une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de raison r. On sait donc seulement que $u_{n+1} = u_n + r$.

Montrons que son terme général est, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$.

On note v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par le deuxième membre de l'égalité à prouver : $v_n = u_0 + nr$.

Il s'agit maintenant de montrer que u et v sont une seule et même suite.

Si deux suites ont le même terme initial et vérifient la même relation de récurrence, alors elles sont égales. Montrons donc que :

$$v_0 = u_0 \text{ et que } v_{n+1} = v_n + r.$$

D'abord $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$.

Ensuite, $v_{n+1} = u_0 + (n+1) \times r = u_0 + n \times r + r = v_n + r$.

On a ainsi montré que les suites u et v sont une seule et même suite et ,par conséquent, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Exemple 3. La suite arithmétique u est définie pour tout entier naturel n par $u_0 = -230$ et $u_{n+1} = u_n + 5$. Exprimer u_n en fonction de n.

Méthode : pour déterminer le terme général d'une suite arithmétique, *on identifie sa raison et son premier terme pour appliquer le théorème.*

Théorème. Soit u une suite et a et b deux nombres réels.
Si pour tout entier naturel n, on a $u_n = a + bn$ alors la suite u est arithmétique.

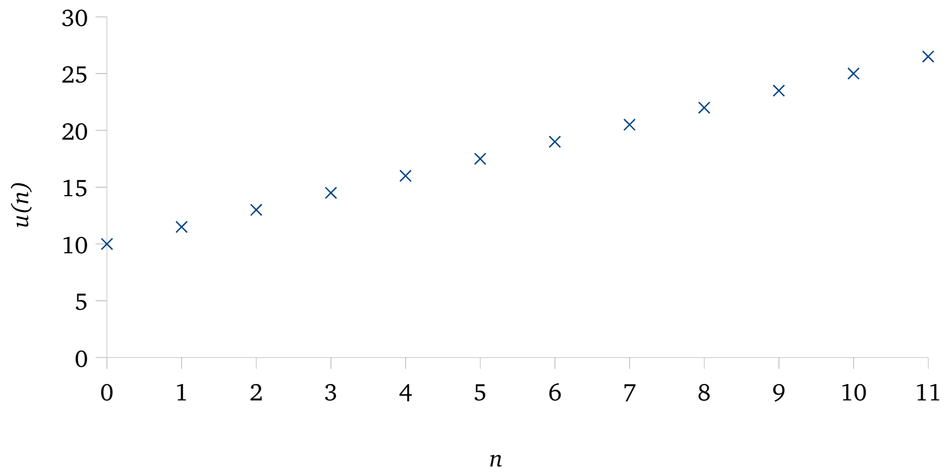
Démonstration. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (\, a + b(n+1)\,) - (\, a + bn\,) \\ &= (\, a + bn + b\,) - (\, a + bn\,) \\ &= b \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n$ est constant (b est fixé), la suite u est donc arithmétique (de raison b et de premier terme $u_0 = a$).

Graphiquement, les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Représentation graphique de la suite arithmétique de raison $r = 1{,}5$ *et de terme initial* $u_0 = 10$



En effet, on remarque que le terme général d'une suite arithmétique est de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine.

III. Sens de variation d'une suite arithmétique

On rappelle ici une méthode permettant d'étudier le sens de variation d'une suite bien adaptée aux suites arithmétiques :

- si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n, la suite est croissante ($u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n)
- si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n, la suite est décroissante ($u_{n+1} < u_n$ pour tout entier naturel n)
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout entier naturel n, la suite est constante ($u_{n+1} = u_n$ pour tout entier naturel n).

Exemple 4. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3 + 2n$. Déterminer le sens de variation de la suite u.

Méthode : pour déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, on privilégie l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

On pourra remarquer que le sens de variation d'une suite arithmétique ne dépend que de sa raison.

IV. Somme de termes consécutifs

Théorème : Pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Soit n un entier naturel non nul. Calculons astucieusement le double de la somme $1 + 2 + \ldots + n$.

	1	+	2	+	...	+	$n-1$	+	n
+	n	+	$n-1$	+	...	+	2	+	1
	$n+1$	+	$n+1$	+	...	+	$n+1$	+	$n+1$

Il y a n colonnes égales à $n + 1$. On en déduit que le double de la somme $1 + 2 + \ldots + n$ est égal à $n \times (n + 1)$ ce qui donne pour finir :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Théorème : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Démonstration. Selon la même idée que la précédente.

Exemple 5. Soit la suite arithmétique u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 50 + 2n$. Calculer la somme $u_0 + u_1 + ... + u_9 + u_{100}$.

Méthode : pour déterminer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique,

on utilise le théorème ou le principe de la somme inversée.

Les suites : Suites arithmétiques

« La vie est un mystère qu'il faut vivre, et non un problème à résoudre. » Gandhi

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n$ est-elle arithmétique ?
2. La suite arithmétique u est définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$. Exprimer u_n en fonction de n.
3. On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 2n$. Déterminer le sens de variation de la suite u.
4. On considère la suite arithmétique u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 2n + 1$.

Calculer la somme $u_0 + u_1 + ... + u_{99} + u_{100}$.

Exercice 2

La première année de sa carrière, un employé fut embauché pour un salaire annuel brut égal à 21 000 €. Au début de chacune des années suivantes, il a bénéficié d'une augmentation de son salaire annuel de 360 € brut. Il a travaillé en tout 42 ans.

On note u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ donnant selon l'année le salaire annuel brut, en euros, de cet employé : on a donc $u_1 = 21\,000$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite u.
   b. Déterminer le sens de variation de la suite u.
3. a. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
   b. En déduire le salaire annuel brut de cet employé lors de sa dernière année de travail.
4. Quelle somme totale cet employé a-t-il gagné au cours de sa carrière ?

Exercice 3

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n}$.

L'objectif de cet exercice est d'obtenir le terme général de la suite u, c'est-à-dire d'exprimer u_n en fonction de n.

1. a. Calculer u_1 et u_2 .
   b. En déduire que la suite u n'est pas arithmétique.

2. On introduit maintenant la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n-2}$.

   a. Calculer les trois premiers termes de la suite v.

   b. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{4-u_n}{2(u_n-2)}$ et en déduire que $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}$.

   c. Quelle est la nature de la suite v ?

   d. Étudier son sens de variation.

   e. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

3. a. Exprimer u_n en fonction de v_n .
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   c. Étudier le sens de variation de la suite u.

Les suites : Suites géométriques

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Activité. Lorsque Basile reçut 5 000 € de sa grand-mère, il décida de placer cette somme sur un livret rémunéré au taux net de 3 %.

1. Montrer que le livret, au bout de 5 ans, présentait un solde de 5 796,37 € (arrondi au centième).
2. Au bout de combien d'année ce livret a-t-il présenté pour la première fois un solde supérieur à 7 000 € ?

La légende de Sessa en vidéo

La légende de Sessa à lire

Les suites : Suites géométriques

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Les suites géométriques peuvent servir à modéliser les *évolutions successives à taux constant* (évolution à taux fixe, population qui augmente ou diminue selon le même rapport - en pourcentage par exemple - chaque année, décroissance radioactive…) : on parle alors de *phénomène discret* (entre deux valeurs successives, il n'existe rien contrairement aux *phénomènes continus* qui peuvent être modélisés par les fonctions) *à croissance exponentielle* (plus la quantité est élevée, plus son augmentation est importante).

I. Définition

Une suite est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

Définition. Une suite u est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q s'appelle alors la raison de la suite géométrique u.

Exemple 1. Montrer que la suite strictement positive u définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^{n+2}$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

Solution. Montrons que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par la même nombre indépendant de n.

Comme $u_n > 0$ pour tout entier naturel n, on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 2^{(n+1)+2}}{3\times 2^{n+2}} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2^{(n+3)-(n+2)} = 2^1 = 2$$

La suite u est donc géométrique de raison 2 et son premier terme est $u_0 = 3 \times 2^0 = 3 \times 1 = 3$.

Exemple 2. Montrer que la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ n'est pas géométrique.

Solution. Montrons que l'on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par le même nombre.

$u_0 = 4$

$u_1 = 2u_0 - 3 = 2\times4 - 3 = 5$ donc $u_1 = \frac{5}{4} u_0$.

$u_2 = 2u_1 - 3 = 2\times5 - 3 = 7$ donc $u_2 = \frac{7}{5} u_1$.

Comme $\frac{5}{4} = 1{,}25 \neq \frac{7}{5} = 1{,}4$ on en déduit que la suite u n'est pas géométrique.

II. Terme général

Théorème. Si u est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n \qquad \text{et} \qquad u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Démonstration. Soit u une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de raison q. On sait donc seulement que $u_{n+1} = u_n \times q$.

Montrons que son terme général est, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$. On a donc une égalité à démontrer.

On note v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par le deuxième membre de l'égalité à prouver : $v_n = u_0 \times q^n$.

Il s'agit maintenant de montrer que u et v sont une seule et même suite.

Si deux suites ont le même terme initial et vérifient la même relation de récurrence, alors elles sont égales. Montrons donc que :

$$v_0 = u_0 \text{ et que } v_{n+1} = v_n \times q.$$

D'une part : $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0$.

D'autre part : $v_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$.

On a ainsi montré que les suites u et v sont une seule et même suite et ,par conséquent, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

La démonstration de l'égalité $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ est similaire.

Exemple 3. On considère la suite u définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2 \times u_n$. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{25}.

Solution. On reconnaît par la relation de récurrence la définissant une suite géométrique de raison 2. Son premier terme est $u_1 = 3$ donc son terme général est :

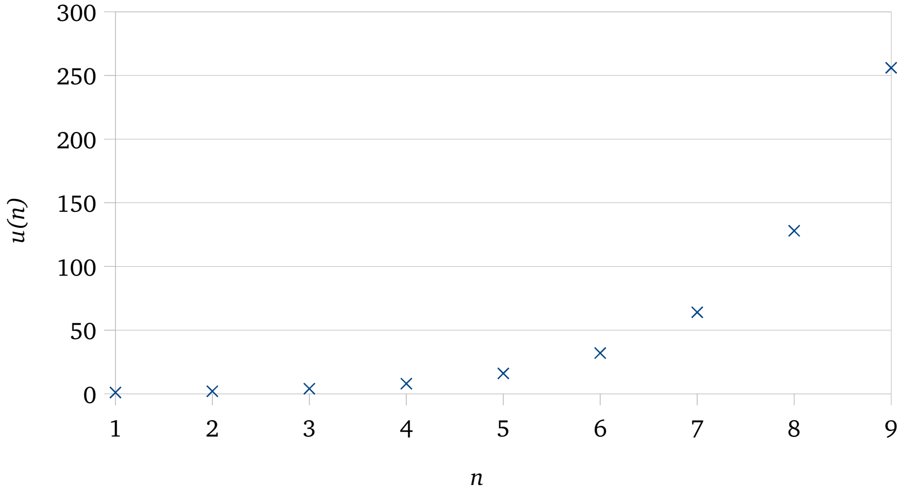
$$u_n = u_1 \times 2^{n-1}$$

$$u_n = 3 \times 2^{n-1}$$

On peut alors calculer u_{25} directement : $u_{25} = 3 \times 2^{24} = 50\ 331\ 648$.

III. Lien avec les fonctions exponentielles et sens de variation

Représentation graphique de la suite géométrique de raison $q = 2$ et de terme initial $u_1 = 1$



Le terme général d'une suite géométrique est de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction exponentielle (fonction dont la croissance est bien plus rapide que celle de la fonction carré, cube ou de n'importe quelle fonction puissance). Cette fonction sera bientôt étudiée.

Exemple 4. On considère la suite strictement positive u définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. Déterminer son sens de variation.

Solution. La suite étant strictement positive et étant définie par une multiplication, on privilégie la méthode du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ que l'on comparera à 1.

Pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite est strictement décroissante.

Attention, si la raison d'une suite géométrique est négative, cette suite n'est pas monotone car ses termes vont être alternativement positif et négatif (pour appliquer la méthode du rapport, les termes doivent être strictement positifs car on multiplie l'inégalité par u_n pour comparer u_{n+1} et u_n)**.**

IV. Somme de termes consécutifs

Théorème. Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et pour tout entier naturel non nul n : $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On peut écrire aussi : $1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Démonstration. Soit n un entier naturel non nul. On note $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

S_n	=	1	+	q	+	q^2	+	…	+	q^{n-1}	+	q^n
$q \times S_n$	=	q	+	q^2	+	…	+	…	+	q^n	+	q^{n+1}
$S_n - q \times S_n$	=	1	+	q	–	q	+		…		–	q^{n+1}

Donc :

$$S_n - q \times S_n = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Théorème. Soit u_n une suite géométrique de raison $q \neq 1$ définie à partir de u_0 ou u_1. Alors, pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_9 + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{et} \qquad u_1 + \ldots + u_9 + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

Démonstration. Si u_n est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ définie à partir de u_0 , alors, pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_9 + u_n$$
$$= u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^n$$
$$= u_0\,(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\,)$$
$$= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Si u_n est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ définie à partir de u_1 , alors, pour tout entier naturel n :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_9 + u_n$$
$$= u_1 + u_1 \times q + \ldots + u_1 \times \; q^{n-1}$$
$$= u_1\,(1 + q + \ldots + \; q^{n-1}\;)$$
$$= u_0 \times \frac{1-q^{(n-1)+1}}{1-q}$$
$$= u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Exemple 5. u est la suite géométrique de raison 0,1 avec $u_0 = 50$. Calculer la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$ (arrondir au centième).

Solution. La suite étant géométrique, on applique le théorème directement :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 50 \times \frac{1-0{,}1^{10+1}}{1-0{,}1} = 50 \times \frac{1-0{,}1^{11}}{0{,}9} \approx 55{,}56$$

Les suites : Suites géométriques

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Exercice 1

Une somme de 5 000 euros est placée sur un compte : chaque année, par les intérêts, cette somme augmente de 2 %. On note, pour tout entier naturel n, u_n le capital acquis, en euro, après n années. On a ainsi $u_0 = 5\,000$.

1. Montrer que $u_2 = 5\,202$.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite u ?
4. Quel est le sens de variation de la suite u ?
5. Exprimer u_n en fonction de n.
6. À partir de combien d'années la somme dépassera-t-elle 6 500 euros ?

Exercice 2

Une voiture coûte 32 000 € lors de son achat. Chaque année, elle perd 17 % de sa valeur. Pour tout entier naturel n, on note u_n la valeur en euros de la voiture après n années de baisse. On a ainsi $u_0 = 32\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite u ?
4. Quel est le sens de variation de la suite u ?
5. Exprimer u_n en fonction de n.
6. Que permet de déterminer le programme suivant ?

```
def seuil():
    u=32000
    n=0
    while u>5000:
        n=n+1
        u=0.83*u
    return n
```

Exercice 3

Soient u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2$ et v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 4$.

1. La suite u est-elle géométrique ?
2. La suite v est-elle géométrique ?
3. Exprimer v_n en fonction de n puis calculer v_{10} (arrondi à 10^{-4}). Quel est le sens de variation de la suite v ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$. (arrondi à à 10^{-4}).

Exercice 4

Soient u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -0{,}5u_n + 6$ et v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 4$.

1. La suite u est-elle géométrique ? Préciser son sens de variation.
2. Quel est le sens de variation de la suite v ? La suite v est-elle géométrique ?
3. Exprimer v_n en fonction de n puis calculer v_{10} (arrondi à 10^{-4}).
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$. (arrondi à à 10^{-4}).

Exercice 5

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés. Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120 000. Ce nombre augmenterait ensuite de 2% chaque semaine. Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400 000 visionnages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120\ 000$.

1. Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.
2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. On admet que la suite u est strictement positive. Prouver qu'elle est strictement croissante.
   c. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120\ 000 \times 1{,}02^n$.
3. À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150 000 ?
4. Voici un algorithme écrit en langage Python :

```
def seuil():
    u=120000
    n=0
    while u<400000:
        n=n+1
        u=1.02*u
    return n
```

Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.
5. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Montrer que l'on a :

$$S_n = 6\ 000\ 000 \times (1{,}02^{n+1} - 1)$$

Puis en déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).

Exercice 6

Le National Géographic indique sur son site, en 2023, les informations suivantes :

- À travers le monde, 73 % des déchets sur les plages sont du plastique : filtres de cigarettes, bouteilles, bouchons, emballages alimentaires, sacs ou bacs en polystyrène.
- Depuis 2015, plus de 6,9 milliards de tonnes de déchets plastique ont été produites. Environ 9 % ont été recyclés, 12 % ont été incinérés et 79 % ont été accumulés dans des décharges ou dans la nature.
- Plus de 40 % du plastique n'est utilisé qu'une fois, avant d'être jeté.

Une étude de l'OCDE de 2022, accessible en ligne sur le site de l'organisation , établit le scénario de référence suivant : la consommation mondiale de plastique pourrait passer de 460 millions de tonnes (Mt) en 2019 à 1 231 Mt en 2060, ce qui correspond approximativement à une augmentation de 2,4 % par an.
Dans cet exercice, on admet que la consommation mondiale subit une augmentation annuelle égale à 2,4 %.

1. En utilisant la consommation mondiale en 2019, retrouver la consommation mondiale de plastique en 2018 (arrondir au Mt).

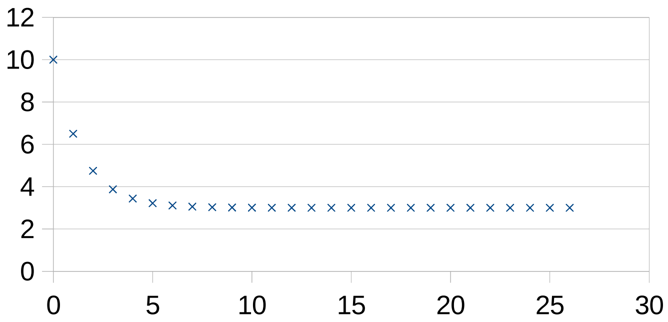
On modélise maintenant la consommation mondiale de plastique, en Mt, produite en l'année $(2019 + n)$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'années à partir de l'an 2019. Ainsi, $u_0 = 460$.
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison. Préciser son sens de variation.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
4. Quelle est la consommation mondiale de plastique prévue en 2035 ? Arrondir au million de tonnes.
5. En quelle année la consommation mondiale de plastique pourrait-elle ainsi dépasser le milliard de tonnes ?

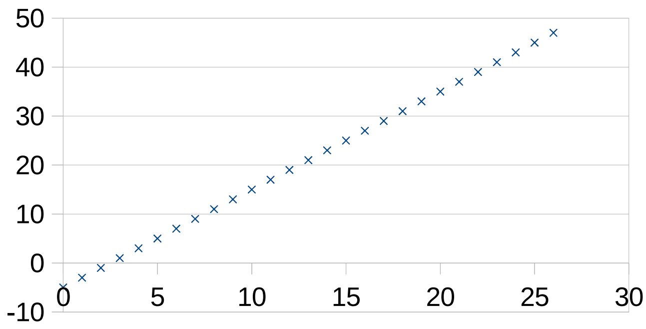
Les suites : Notion de limite

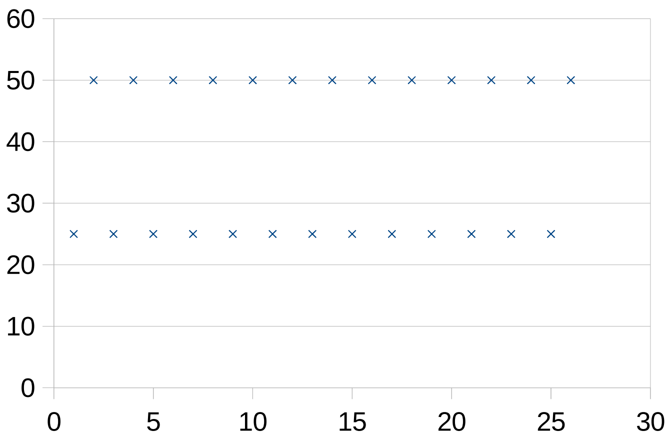
« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

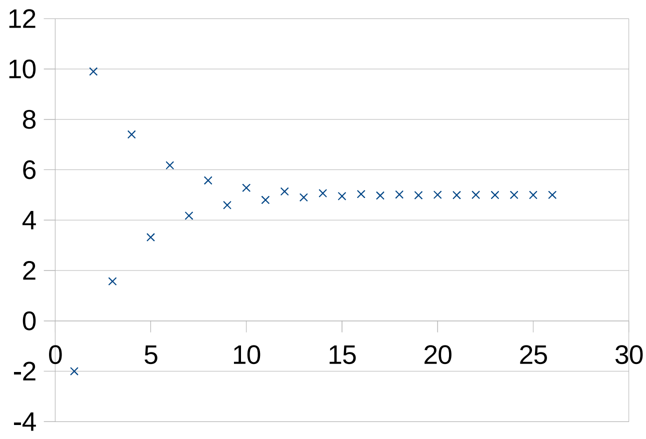
Activité.

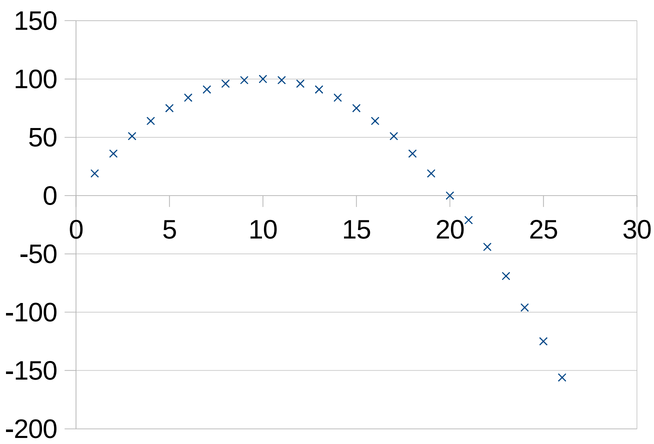
1. On a représenté graphiquement les termes de quelques suites en fonction de l'indice n.

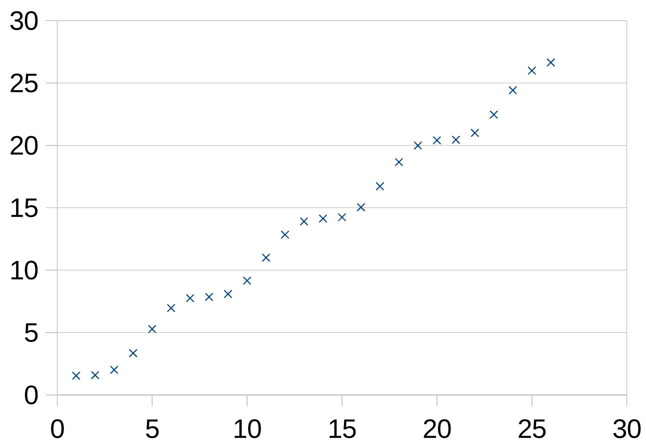












Indiquer dans chaque cas quelle semble-t-être la limite des termes de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Maintenant, selon la version de votre TI 83, voici deux vidéos pour apprendre à obtenir la représentation graphique d'une suite (à visionner avec votre calculatrice).

Les suites numériques avec la TI-83 Premium CE (Mise à jour 5.2)

Représenter les premiers termes d'une suite - Tutoriel TI

Les suites : Notion de limite

« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

La notion de limite a déjà été utilisée pour définir le nombre dérivé d'une fonction en un point : le nombre dérivé est la limite du taux de variation.

Nous allons nous focaliser un peu sur cette notion de limite à travers les limites de suite.

Les suites ont été étudiées pour modéliser des phénomènes discrets et prévoir leur évolution par exemple. Dans la suite (pas fait exprès) de ce travail, nous allons observer ce qu'il semble se passer lorsque les valeurs de n deviennent grandes, très grandes (vidéo sur les très grands nombres !). Heureusement, dans la totalité des cas rencontré en 1re, nous n'aurons pas besoin d'aller aussi loin. En fait, comme il s'agit d'une approche intuitive de la notion de limite, nous resterons même très modestes : les 1res valeurs suffiront souvent pour se faire une idée.

Il faut d'ailleurs aussi comprendre une chose essentielle : tout ce que nous dirons sur les limites de suite restera à l'état de conjecture (c'est-à-dire de supposition). En effet, pour prouver qu'une suite admet telle ou telle limite, il faut d'abord savoir ce que signifie mathématiquement une limite : il manque une définition précise.

Historiquement d'ailleurs, cette définition est arrivée tardivement. Pour vous, elle sera donnée en terminale (en spécialité et dans une moindre mesure en option « Mathématiques complémentaires »).

L'objectif de cette partie est donc clair :

Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

Pour cela, la première chose à savoir, ce sont les différents cas qui peuvent se présenter. Les voici dans cette pseudo-définition :

Définition. Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, une suite (u_n) peut avoir pour limite :

- un réel (on dit qu'elle converge vers ce réel)
- l'infini (on dit qu'elle diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$)
- ne pas avoir de limite (on dit alors aussi qu'elle diverge)

On remarquera qu'on emploie le vocabulaire « converger » si la limite est un nombre réel, et « diverger » dans deux cas : si la limite est infinie, ou si elle n'existe pas.

Exemple 1. Voici un tableau de quelques termes de la suite u définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 43 + 100 \times 0{,}8^{\,n}$.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$u(n)$	143	75,77	53,74	46,52	44,16	43,38	43,12	43,04	43,01

Conjecturer la limite de la suite u.

Solution. La suite u semble converger vers 43 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 43$$

Exemple 2. (v_n) est la suite arithmétique de premier terme 10 et de raison – 2. Conjecturer sa limite.

Solution. Le terme général de la suite est $v_n = 10 - 2n$.

On a $v_{10} = -10$, $v_{100} = -190$, $v_{1000} = -1990$…

La suite v semble diverger vers $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$$

Exemple 3. (v_n) est la suite géométrique de premier terme 2 et de raison –1. Conjecturer sa limite.

Solution. Le terme général de la suite est $v_n = 2 \times (-1)^n$. , ce qui donne 2 lorsque n est pair et –2 lorsque n est impair.

La suite v ne semble pas avoir de limite : elle diverge.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \text{ n'existe pas.}$$

Déterminer la limite d'une suite

Les suites : Notion de limite

« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme – 3 et de raison 0,3. Sa limite :

   a. est $+\infty$ b. est $-\infty$ c. est un réel d. n'existe pas

2. (v_n) est la suite géométrique de premier terme – 3 et de raison 0,3. Sa limite :

   a. est $+\infty$ b. est $-\infty$ c. est un réel d. n'existe pas

3. (w_n) est la suite arithmétique de premier terme 0,3 et de raison – 3. Sa limite :

   a. est $+\infty$ b. est $-\infty$ c. est un réel d. n'existe pas

4. (z_n) est la suite géométrique de premier terme 0,3 et de raison – 3. Sa limite :

   a. est $+\infty$ b. est $-\infty$ c. est un réel d. n'existe pas

5. Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{n}{1+2n}$. Sa limite :

   a. est $+\infty$ b. est $-\infty$ c. est un réel d. n'existe pas

6. Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{2n+2}{n+3}$. Sa limite :

   a. est $+\infty$ b. est $-\infty$ c. est un réel d. n'existe pas

Exercice 2

Un magasin effectue des promotions avant sa liquidation définitive, chaque semaine les prix des articles sont diminués de 10% par rapport à la semaine précédente.
Un manteau coûte 200 € avant le début de la liquidation, on pose $u_0 = 200$ et on note u_n son prix lors de la n-ième semaine de liquidation.

1. Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite (u_n).
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 200$ dont on précisera la raison et exprimer le terme général de la suite (u_n) en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
4. On considère la fonction suivante, écrite en langage Python :

```
def seuil(x) :
    u = 200
    n = 0
    while......... :
        u =...
        n =...
    return n
```

Recopier et compléter sur la copie la fonction afin qu'elle renvoie le nombre de semaines nécessaires pour que le terme général de la suite (u_n) soit inférieur au nombre réel x.

5. Une personne décide d'acheter le manteau dès que son prix sera inférieur à 100 €. Combien de semaines devra-t-elle attendre ?
6. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

En 2016, a été lancée une plateforme de streaming par abonnement.

Le tableau suivant donne le nombre d'abonnés (en million) au 31 décembre de chaque année de 2016 jusqu'en 2019.

Rang de l'année	1	2	3	4
31 décembre de l'année :	2016	2017	2018	2019
Nombre d'abonnés (en millions)	12	13,7	15,8	18,2

Les responsables de cette plateforme étudient l'évolution du nombre d'abonnés afin d'adapter leurs investissements.

1. Donner une valeur approchée de l'évolution du nombre d'abonnés entre 2016 et 2017, en pourcentage.
2. On considère que le nombre d'abonnés a augmenté de 15 % par an à partir de 2016. On décide de modéliser ce nombre d'abonnés (en millions) par une suite u de premier terme 12.
Préciser la nature de cette suite et sa raison.
3. Quel sera selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2020, arrondi au million ?
4. Déterminer le sens de variation de la suite u.
5. Pour déterminer en quelle année, selon ce modèle, sera obtenu l'objectif de 40 millions d'abonnés, on a défini en langage Python la fonction Seuil ci-dessous.

```
1    def Seuil() :
2        n=2016
3        A=12
4        while .... :
5            A= ....
6            n=n+1
7        return n
```

Recopier et compléter les instructions 4 et 5 afin que ce programme fournisse l'année où cet objectif sera atteint.

6. Conjecturer la limite de la suite.

Exercice 4

Une balle est lâchée d'une hauteur de 3 mètres au-dessus du sol. Elle touche le sol et rebondit. À chaque rebond, la balle perd 25 % de sa hauteur précédente.

On modélise la hauteur de la balle par une suite (h_n) où h_n désigne la hauteur maximale de la balle, en mètres, après le n-ième rebond. On a donc $h_0 = 3$.

1. Calculer h_1 et h_2 .
2. La suite (h_n) est-elle arithmétique ? Justifier.
3. Déterminer la nature de la suite (h_n) en précisant ses éléments caractéristiques.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
5. Déterminer la hauteur, arrondie au cm, de la balle après 6 rebonds.
6. La fonction « seuil » est définie ci-dessous en langage Python.

```
1    def seuil() :
2        h=3
3        n=0
4        while .... :
5            h= ....
6            n=n+1
7        return n
```

Recopier et compléter les lignes 4 et 5 pour que cette fonction renvoie le nombre de rebonds à partir duquel la hauteur maximale de la balle sera inférieure ou égale à 10 centimètres.

7. Conjecturer la limite de la suite (h_n).