Le second degré

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Forme factorisée

- Activité
- Cours
- Exercices

2. Forme canonique et équations

- Activité
- Cours
- Exercices

SECOND DEGRÉ : FORME FACTORISÉE

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

Activité 1

1. Développer $3(x + 2)^2$.
2. Factoriser $2x^2 - 12x + 18$.

Activité 2

1. Développer $3(x - 2)(x + 2)$.
2. Factoriser au maximum $2x^2 - 18$.

Activité 3

Après analyse, le bénéfice, en millier d'euros, d'une entreprise a été modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 7x - 3$$

où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaines.

1. Montrer que pour tout $x \in [0 ; 3]$, $f(x) = -2\,(x - 0{,}5)\,(x - 3)$.
2. Dans quels cas le bénéfice est-il nul ?
3. Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.
4. Pour quelles valeurs de x le bénéfice est-il positif ?

SECOND DEGRÉ : FORME FACTORISÉE

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

I. DÉFINITION

Les fonctions affines étudiées en 3e et en 2de sont ce qu'on appelle des fonctions polynômes du 1er degré : leur expression algébrique peut s'écrire sous la forme $ax + b$.

Définition. Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Une fonction polynôme du second degré est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Cette forme est unique.

Démonstration. On suppose qu'il existe six réels a, b, c, a', b' et c' (a et a' non nuls) tels que, pour tout réel x :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a'\,x^2 + b'\,x + c'$$

Pour $x = 0$, on obtient $c = c$.

Pour $x = 1$, on obtient $a + b + c = a' + b' + c'$ ce qui donne $a + b = a' + b'$ (1).

Pour $x = -1$, on obtient $a - b + c = a' - b' + c'$ ce qui donne $a - b = a' - b'$ (2).

(1) + (2) donne $2a = 2a'$ donc $a = a'$. Puis avec (1), on obtient $b = b'$.

Ce qui montre que la forme est unique.

Comme elle est unique, on l'appelle la forme développée du polynôme. Comme il y a trois termes, on emploie parfois le mot trinôme pour désigner un polynôme du second degré. a, b et c sont les coefficients du polynôme : ils seront notés ainsi dans toute la suite de ce cours (Petite blague pas très drôle).

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré.

On appelle racine du polynôme f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Si elles existent, les racines d'un polynôme sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative du polynôme avec l'axe des abscisses. Dans le cas particulier où il n'existe qu'une seule racine, on parle de racine double.

Exemple 1. Montrer que 2 est une racine de la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

Méthode : pour montrer qu'un nombre x_1 est une racine d'un polynôme, on peut montrer que $f(x_1) = 0$.

II. SOMME ET PRODUIT DES RACINES D'UN POLYNÔME

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré.

Si f possède deux racines alors leur somme est égale à $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$

Démonstration. On prend f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. On suppose que f possède deux racines distinctes x_1 et x_2. On a donc :

$$a\,{x_1}^2 + b\,x_1 + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a\,{x_2}^2 + b\,x_2 + c = 0$$

En soustrayant membre à membre ces deux égalités et en simplifiant par le facteur non nul $x_1 - x_2$, on montre d'abord que :

$$b = -\,a\,(x_1 + x_2) \text{ ce qui donne bien la somme des racines } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

« Vérifier par vous-même, vous ne pouvez pas vous contenter d'un résultat. » Gert Martin Greuel

Puis en substituant b par cette expression dans la première égalité, on montre ensuite que :

$$c = a\,x_1\,x_2 \text{ ce qui donne à son tour le produit des racines } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple 2. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. On suppose que f possède deux racines. Calculer leur produit.

Méthode : Pour calculer le produit ou la somme des deux racines d'une fonction polynôme du second degré, on utilise le théorème.

Exemple 3. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Déduire des exemples 1 et 2 la seconde racine de ce polynôme.

Méthode : Pour trouver la seconde racine d'une fonction polynôme du second degré, on utilise leur somme ou leur produit.

II. Forme factorisée d'un polynôme

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré.
Si le polynôme f possède deux racines x_1 et x_2 alors ce polynôme peut être écrit sous la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Démonstration. On prend f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. On suppose que f possède deux racines distinctes x_1 et x_2. Lors du théorème précédent, on a démontré les égalités suivantes :

$$b = -a(x_1 + x_2) \text{ et } c = a\,x_1\,x_2$$

On développe alors le membre de droite de l'égalité à démontrer :

$$\begin{aligned} & a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \\ &= a\,x^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + a\,x_1\,x_2 \\ &= a\,x^2 + b\,x + c \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Définition. Soient f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines x_1 et x_2.
La forme $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ est appelée forme factorisée du polynôme.

Dans le cas où un polynôme possède une seule racine (appelé alors « racine double »), sa forme factorisée est $a\,(x - x_1)^2$. On peut l'obtenir grâce aux identités remarquables.
Lorsque le polynôme ne possède pas de racines, on dit simplement qu'il n'est pas factorisable : la forme factorisée n'existe pas.

Exemple 4. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Déduire des exemples 1 et 3 la forme factorisée de ce polynôme.

Méthode : Pour factoriser une fonction polynôme du second degré, on peut utiliser ses racines.

IV. Signe d'un polynôme ayant deux racines

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
$f(x)$ est du même signe que a sur $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$ (à l'extérieur des racines).
$f(x)$ est de signe opposé à a sur $]x_1\,;x_2[$ (entre les racines).

Exemple 5. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Étudier son signe.

Méthode : Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée, on peut utiliser le théorème ou un tableau de signes.

Second degré : forme factorisée (résumé)

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

I. C'est quoi un polynôme du second degré ? C'est quoi une racine ?

Les fonctions affines des polynômes du 1er degré : leur expression algébrique peut s'écrire sous la forme $ax + b$.

Définition. Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Une fonction polynôme du second degré est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Cette forme s'appelle la forme développée du polynôme. Elle est unique. a, b et c sont les coefficients du polynôme.

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré.

On appelle racine du polynôme f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Dans le cas particulier où il n'existe qu'une seule racine, on parle de racine double.

Exemple 1. Montrer que 2 est une racine de la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

II. Trouver la seconde racine : somme et produit des racines d'un polynôme

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré.

Si f possède deux racines x_1 et x_2 alors leur somme et leur produit vérifient :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple 2. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. On suppose que f possède deux racines. Calculer leur produit.

Exemple 3. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Déduire des exemples 1 et 2 la seconde racine de ce polynôme.

III. Factoriser un polynôme

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré.

Si le polynôme f possède deux racines x_1 et x_2 alors ce polynôme peut être écrit sous la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Définition. Soient f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines x_1 et x_2.

La forme $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ est appelée forme factorisée du polynôme.

Dans le cas où un polynôme possède une seule racine (appelé alors « racine double »), sa forme factorisée est $a\,(x - x_1)^2$.

Lorsque le polynôme ne possède pas de racines, on dit simplement qu'il n'est pas factorisable : la forme factorisée n'existe pas.

Exemple 4. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Déduire des exemples 1 et 3 la forme factorisée de ce polynôme.

IV. Étudier le signe d'un polynôme ayant deux racines

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.

$f(x)$ est du même signe que a sur $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$ (à l'extérieur des racines).

$f(x)$ est de signe opposé à a sur $]x_1\,;x_2[$ (entre les racines).

Exemple 5. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Étudier son signe.

SECOND DEGRÉ : FORME FACTORISÉE

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

Exercice 1

1. Montrer que 3 est une racine de la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = x^2 + 3x - 18$.
2. Calculer le produit de ses racines et en déduire la seconde racine de ce polynôme.
3. Donner alors sa forme factorisée.

Exercice 2

Le bénéfice, en millier d'euros, d'une entreprise est modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par :

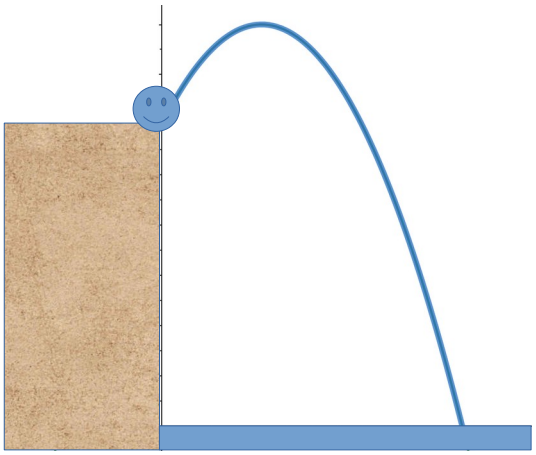
$$f(x) = -2x^2 + 16x - 24$$

où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaines.

1. Montrer que 2 est une racine de f.
2. Calculer la somme des racines et en déduire la seconde racine de f.
3. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
4. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat pour l'entreprise.
5. Dresser le tableau de signes de $f(x)$. En déduire la quantité d'objets que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.

Exercice 3

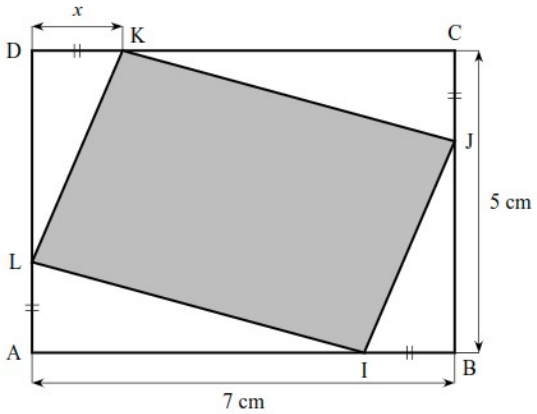
Un plongeon du haut d'une petite falaise est modélisé par la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ qui représente la hauteur du plongeur assimilé à un point en fonction de la distance horizontale parcourue, en mètres. Lorsque x est égal à 0, le plongeur est au sommet de la falaise.



1. Montrer que –1 est une racine de f.
2. Calculer la somme et le produit des racines et en déduire la seconde racine de f.
3. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
4. Quelle est la hauteur de la falaise ?
5. À quelle distance de la falaise le plongeur pénètre-t-il dans l'eau ? Expliquer.

Exercice 4

Sur la figure suivante, ABCD est un rectangle. x est un réel compris entre 0 et 5. L'objectif de cet exercice est de déterminer la ou les valeurs de x pour lesquelles le parallélogramme IJKL a une aire de 25 cm^2.



1. Exprimer la somme des aires des triangles LDK, KCJ, JBI et IAL en fonction de x et en déduire que l'aire A du parallélogramme IJKL en fonction de x est :

$$A(x) = 2x^2 - 12x + 35.$$

2. Montrer que l'équation $A(x) = 25$ est équivalente à l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$.
3. Déterminer une racine évidente du polynôme $x^2 - 6x + 5$.
4. Calculer la somme et le produit des racines du polynôme $x^2 - 6x + 5$ et en déduire la seconde racine.
5. Résoudre le problème.

SECOND DEGRÉ : FORME CANONIQUE ET ÉQUATIONS

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Activité. Au IX siècle, le calife Al-Mamum réunit à Bagdad les scientifiques Perses. À sa demande, Al-Khwarizmi (780-850) a rédigé un traité sur la résolution d'équations. Voici ce qu'on y trouve : « *Un carré et 6 racines sont égaux à 55* » ce qui s'écrit aujourd'hui $x^2 + 6x = 55$. Il cherche donc à résoudre l'équation :

$$x^2 + 6x - 55 = 0.$$

Pas de racine évidente, pas d'identité remarquable apparente, on est bloqués. Al-Khwarizmi invente alors une méthode appelée « complétion du carré ». Voici le principe :

1. Il remarque que $x^2 + 6x$ est le début de $(x + 3)^2$. Trouver le nombre c tel que :

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 + c$$

2. Que devient alors l'équation qu'il cherche à résoudre ?
3. Quelle solution positive Al-Khwarizmi obtient-il ?
4. L'absence des nombres négatifs à l'époque l'empêchait de découvrir une autre solution : laquelle ?

SECOND DEGRÉ : FORME CANONIQUE ET ÉQUATIONS

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

I. FORME CANONIQUE D'UN POLYNÔME

Théorème. Soient f une fonction polynôme du second degré avec a le coefficient de x^2.

Il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Démonstration (indication). On montre que $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$.

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré.

La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ de $f(x)$ est appelée la forme canonique du polynôme.

Exemple 1. Écrire sous forme canonique le polynôme $x^2 - 4x + 8$.

Méthode : Pour obtenir la forme canonique d'un polynôme du second degré,

on peut utiliser l'identité $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$ (méthode de complétion du carré).

II. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du polynôme et il est noté Δ.

Δ se lit « delta », c'est la lettre majuscule « d » en grec.

On rappelle que les racines d'un polynôme sont les solutions de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$.

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.

Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ permet de déterminer le nombre de racines du polynôme :

- si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines égales à $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, le polynôme admet une unique racine (une racine double) égale à $-\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet aucune racine.

Démonstration. D'après la démonstration du théorème concernant l'existence de la forme canonique, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$ ce qui donne : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$.

Si $\Delta < 0$, on cherche x tel que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$, ce qui est impossible.

Si $\Delta = 0$, on cherche x tel que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ce qui donne $x + \frac{b}{2a} = 0$ soit $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, on cherche x tel que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, ce qui donne $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

soit $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x^2 - 2x + 3 = 0$ et $x^2 - x - 1 = 0$.

Méthode : Pour résoudre une équation du second degré sans identité remarquable et n'ayant aucune solution évidente,

on peut calculer son discriminant et utiliser le théorème précédent.

III. Factorisation d'un polynôme

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients et Δ son discriminant.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne peut être factorisé ;
- si $\Delta = 0$, la forme factorisée est $f(x) = a\ (x - x_0)^2$ où x_0 désigne la racine double de f ;
- si $\Delta > 0$, la forme factorisée est $f(x) = a\ (x - x_1)\ (x - x_2)$ où x_1 et x_2 désignent les deux racines de f.

Exemple 3. Factoriser si possible la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$.

Méthode :Pour factoriser une fonction polynôme du second degré sans identité remarquable et n'ayant aucune racine évidente, on calcule son discriminant et on utilise le théorème précédent.

IV. Signe d'un polynôme

Théorème : soient f une fonction polynôme du second degré et Δ son discriminant.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du même signe que a ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du même signe que a ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du même signe que a à l'extérieur des racines et de signe opposé à a entre les racines.

Exemple 4. Donner le signe de la fonction f définie à l'exemple 3.

Méthode :Pour factoriser une fonction polynôme du second degré sans identité remarquable et n'ayant aucune racine évidente, on calcule son discriminant et on utilise le théorème précédent.

Pour conclure sur l'étude algébrique des fonctions polynômes du second degré, dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations), on cherchera d'abord la forme du polynôme la plus adaptée :

- la forme développée réduite
- la forme canonique
- la forme factorisée (si elle existe)

Exemple 5. Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par une fonction h qui donne la hauteur du plongeur (assimilé à un point) en fonction de la distance horizontale x parcourue, en mètres. Cette fonction est définie pour tout réel x positif par :

$$h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}3x + 7$$

On donne aussi les formes canonique et factorisée de h :

$$h(x) = -0{,}1\ (x - 1{,}5)^2 + 7{,}225$$

$$h(x) = -0{,}1\ (x - 10)\ (x + 7)$$

Quelle forme de la fonction h est la plus adaptée pour déterminer la distance de la falaise à laquelle le plongeur pénètre dans l'eau ? Et pour déterminer la hauteur de la falaise ? Et pour déterminer la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

SECOND DEGRÉ : FORME CANONIQUE ET ÉQUATIONS (RÉSUMÉ)

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

I. FORME CANONIQUE D'UN POLYNÔME

Théorème. Soient f une fonction polynôme du second degré avec a le coefficient de x^2.

Il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré.

La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ de $f(x)$ est appelée la forme canonique du polynôme.

Exemple 1. Écrire sous forme canonique le polynôme $x^2 - 4x + 8$.

II. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du polynôme et il est noté Δ .

Δ se lit « delta », c'est la lettre majuscule « d » en grec.

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.

Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ permet de déterminer le nombre de racines du polynôme :

- si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines égales à $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, le polynôme admet une unique racine (une racine double) égale à $-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet aucune racine.

Exemple 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x^2 - 2x + 3 = 0$ et $x^2 - x - 1 = 0$.

III. FACTORISATION D'UN POLYNÔME

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients et Δ son discriminant.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne peut être factorisé ;
- si $\Delta = 0$, la forme factorisée est $f(x) = a\,(x-x_0)^2$ où x_0 désigne la racine double de f ;
- si $\Delta > 0$, la forme factorisée est $f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ où x_1 et x_2 désignent les deux racines de f.

Exemple 3. Factoriser si possible la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$.

IV. SIGNE D'UN POLYNÔME

Théorème : soient f une fonction polynôme du second degré et Δ son discriminant.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du même signe que a ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du même signe que a ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du même signe que a à l'extérieur des racines et de signe opposé à a entre les racines.

Exemple 4. Donner le signe de la fonction f définie à l'exemple 3.

Exemple 5. Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par une fonction h qui donne la hauteur du plongeur (assimilé à un point) en fonction de la distance horizontale x parcourue, en mètres. Cette fonction est définie pour tout réel x positif par :

$$h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}3x + 7$$

On donne aussi la forme canonique de h : $h(x) = -0{,}1\,(x-1{,}5)^2 + 7{,}225$ ainsi que sa forme factorisée : $h(x) = -0{,}1\,(x-10)\,(x+7)$.

Quelle forme de la fonction h est la plus adaptée pour déterminer la distance de la falaise à laquelle le plongeur pénètre dans l'eau ? Et pour déterminer la hauteur de la falaise ? Et pour déterminer la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

SECOND DEGRÉ : FORME CANONIQUE ET ÉQUATIONS

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Exercice 1

1. La forme canonique du polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $2x^2 - 8x + 6$ est :

a) $2(x-2)^2 + 2$ b) $2(x-2)^2 + 10$ c) $2(x-2)^2 - 14$ d) $2(x-2)^2 - 2$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$. On considère l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de cette équation est :

a) $\emptyset$ b) $\{2 - \sqrt{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\}$ c) $\{2 - \sqrt{6}\ ;\ 2 + \sqrt{6}\}$ d) $\{4 - 2\sqrt{2}\ ;\ 4 + 2\sqrt{2}\}$

3. On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle :

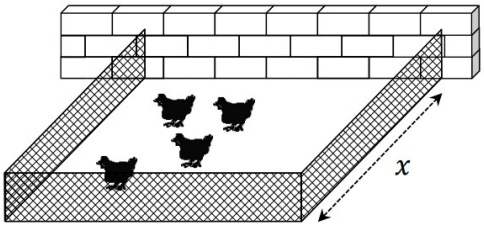
a) $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$ b) $]-1\ ;\ 3[$ c) $]-\infty\ ;\ -3[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ d) $]-3\ ;\ 1[$

Exercice 2

Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur de sa ferme afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos.

Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale.

On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.

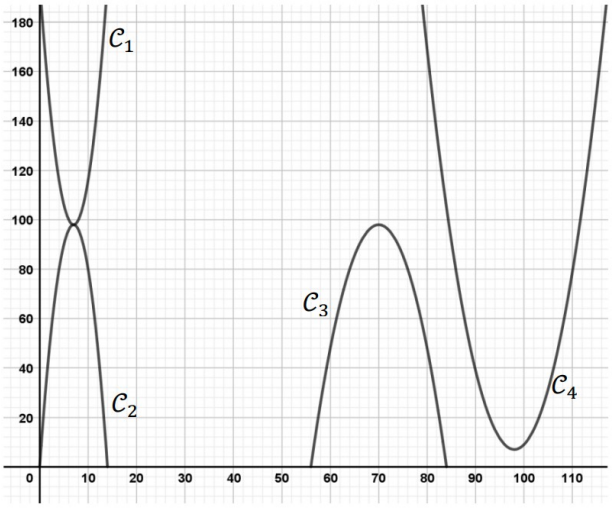


On appelle A la fonction qui à un nombre x associe $A(x)$ l'aire de l'enclos. La fonction A est ainsi définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 14]$.

1. a. Vérifier que l'aire $A(x) = -2x^2 + 28x$.

   b. Déterminer la forme canonique de $A(x)$.

2. Quatre courbes ont été tracées sur le graphique ci-dessous. Identifier celle qui représente la fonction A. *Justifier*.



3. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Donner la valeur de cette aire.

Exercice 3

Le bénéfice, en dizaines de milliers d'euros, d'une entreprise est modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 3] par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaines.

1. Quel est le bénéfice de l'entreprise lorsqu'elle ne vend aucun objet ? Et lorsque qu'elle en vend 300 ?
2. a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le nombre d'objets que doit fabriquer et vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice nul.

   b. Donner la forme factorisée de $f(x)$ puis étudier son signe et en déduire le nombre d'objets que doit fabriquer et vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.
3. a. Vérifier que la forme canonique de $f(x)$ est : $-2(x - 1{,}25)^2 + 1{,}125$.

   b. En déduire le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et le nombre d'objet vendus pour lequel il est atteint.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

Déterminer une expression de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

2. On note T la tangente à C_f au point d'abscisse -1.

Donner l'équation réduite de la tangente T.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$.

On note C_g sa courbe représentative dans le même repère que la courbe C_f.

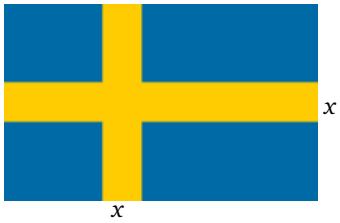
   a. Calculer, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x)$.

   b. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f(x) - g(x)$.

   c. En déduire pour quelles valeurs de x la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g.

Exercice 5

Voici un drapeau composé d'un fond bleu et d'une croix jaune. La bande jaune horizontale à la même largeur x que la bande jaune verticale. Le drapeau mesure 8 dm sur 5 dm.



Quelles peuvent être les valeurs de x pour que l'aire de la croix jaune soit égale à l'aire du fond bleu ?