Le second degré

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Forme factorisée

- Activité
- Cours
- Exercices

2. Forme canonique et équations

- Activité
- Cours
- Exercices

2. Paraboles

- ~~Activité~~
- Cours
- Exercices

Second degré : forme factorisée

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

Activité 1

1. Développer $3(x+2)^2$.
2. Factoriser $2x^2 - 12x + 18$.

Activité 2

1. Développer $3(x-2)(x+4)$.
2. Résoudre l'équation $3x^2 + 6\,x - 24 = 0$.

Activité 3

Résoudre l'équation $3x^2 + 7 = 0$.

SECOND DEGRÉ : FORME FACTORISÉE

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

I. DÉFINITION

Les fonctions affines étudiées en 3e et en 2de sont ce qu'on appelle des fonctions polynômes du 1er degré : leur expression algébrique peut s'écrire sous la forme $ax + b$.

Définition. Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Une fonction polynôme du second degré est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Théorème. La forme $a\,x^2 + b\,x + c$ est unique.

Démonstration. On suppose qu'il existe six réels a, b, c, a', b' et c' (a et a' non nuls) tels que, pour tout réel x :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a'\,x^2 + b'\,x + c'$$

Lorsque $x = 0$, on obtient $c = c'$.

Lorsque $x = 1$, on obtient $a + b + c = a' + b' + c'$ ce qui donne $a + b = a' + b'$ (égalité 1).

Et lorsque $x = -1$, on obtient $a - b + c = a' - b' + c'$ ce qui donne $a - b = a' - b'$ (égalité 2).

En sommant les égalités 1 et 2, on obtient $2a = 2a'$ soit $a = a'$ et l'égalité 1 par exemple permet d'obtenir $b = b'$.

Ce qui montre que la forme est unique.

Comme elle est unique, on l'appelle la forme développée du polynôme. Comme il y a trois termes, on emploie parfois le mot trinôme pour désigner un polynôme du second degré. a, b et c sont les coefficients du polynôme : ils seront notés ainsi dans toute la suite de ce cours (Petite blague pas très drôle).

II. SOMME ET PRODUIT DES RACINES D'UN POLYNÔME

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré.

On appelle racine du polynôme f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Si elles existent, les racines d'un polynôme sont donc les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative du polynôme avec l'axe des abscisses.

Exemple 1. Montrer que 2 est une racine de la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

Méthode : pour montrer qu'un nombre x_1 est une racine d'un polynôme, on peut montrer que $f(x_1) = 0$.

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré.

Si f possède deux racines distinctes alors leur somme est égale à $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est égal à $\dfrac{c}{a}$

Démonstration. On prend f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. On suppose que f possède deux racines distinctes x_1 et x_2. On a donc :

$$a\,x_1^{\,2} + b\,x_1 + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a\,x_2^{\,2} + b\,x_2 + c = 0$$

Cela donne, par soustraction :

$$(a\,x_1^{\,2} + b\,x_1 + c) - (a\,x_2^{\,2} + b\,x_2 + c) = 0$$

$$a\,(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}) + b\,(x_1 - x_2) = 0$$

$$a\,(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2) + b\,(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)\,[\,a\,(x_1 + x_2) + b\,] = 0$$

Et comme $x_1 \neq x_2$, on a $x_1 - x_2 \neq 0$ et on obtient :

$$a\,(x_1 + x_2) + b = 0$$

Ce qui donne la somme des racines :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ensuite, $a\,(x_1 + x_2) + b = 0$ donc $b = -a\,(x_1 + x_2)$ et en injectant cette expression dans par exemple $a\,x_1{}^2 + b\,x_1 + c = 0$, on obtient :

$$a\,x_1{}^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x_1 + c = 0$$

$$a\,x_1{}^2 - a\,x_1{}^2 - a\,x_2\,x_1 + c = 0$$

$$-a\,x_2\,x_1 + c = 0$$

$$c = a\,x_1\,x_2$$

Ce qui donne le produit des racines :

$$x_1\,x_2 = \frac{c}{a}$$

Théorème. Une fonction polynôme du second degré admet au plus deux racines distinctes.

Démonstration. Supposons qu'il existe un polynôme admettant au moins trois racines distinctes x_1, x_2 et x_3.

Comme $x_1 \neq x_2$, le théorème précédent donne $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ soit $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$.

De la même façon, comme $x_1 \neq x_3$, on obtient $x_1 + x_3 = -\frac{b}{a}$ soit $x_3 = -\frac{b}{a} - x_1$.

Cela permet d'en déduire que $x_2 = x_3$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

On vient de prouver qu'un polynôme du second degré ne peut pas admettre plus de deux racines distinctes.

Ces deux derniers théorèmes permettent ainsi d'obtenir, si elle existe, la seconde racine d'un polynôme.

Exemple 2. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. On suppose que f possède deux racines. Calculer leur produit.

Méthode : Pour calculer le produit ou la somme des deux racines d'une fonction polynôme du second degré, on utilise le théorème.

Exemple 3. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Déduire des exemples 1 et 2 la seconde racine de ce polynôme.

Méthode : Pour trouver la seconde racine d'une fonction polynôme du second degré, on utilise leur somme ou leur produit.

Certains polynômes n'admettent aucune racine comme $x^2 + 1$: puisque pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ on a donc $x^2 + 1 \geq 1$ et en particulier, quelque soit le réel x, $x^2 + 1 \neq 0$.

Certains polynômes n'admettent qu'une seule racine, comme par exemple $x^2 - 2x + 1$ car, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

III. Factorisation d'un polynôme

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré.

Si le polynôme f possède une racine x_1 alors il peut être écrit sous la forme $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On prend f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. On suppose que f possède une racine x_1.

Puisque $f(x_1) = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_1) \qquad \text{(un peu étrange, mais ça va s'éclairer)} \\ &= a\,x^2 + b\,x + c - a\,x_1{}^2 - b\,x_1 - c \\ &= a\,(x^2 - x_1{}^2) + b\,(x - x_1) \\ &= a\,(x - x_1)\,(x + x_1) + b\,(x - x_1) \end{aligned}$$

$$= a(x-x_1)\left((x+x_1)+\frac{b}{a}\right)$$

$$= a(x-x_1)\left(x-\left(-x_1-\frac{b}{a}\right)\right)$$

On prend alors $x_2 = -x_1 - \dfrac{b}{a}$ et on a bien :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Ce théorème est remarquable d'abord parce qu'il permet de montrer que la factorisation est possible dès qu'une racine existe, ensuite parce qu'on retrouve le théorème de la somme des racines (et par conséquent celui du produit) sans avoir la condition des racines distinctes (si $x_2 = x_1$, la racine est appelée « racine double ») et enfin, parce qu'il permet de ne pas avoir besoin de vérifier que le second nombre obtenu par le théorème de la somme ou du produit est effectivement une racine (mais la vérification reste utile pour déceler une erreur).

Théorème. Lorsqu'elle existe, la forme $a\ (x - x_1)\ (x - x_2)$ est unique.

Démonstration. Le coefficient a et les racines x_1 et x_2 sont uniques (éventuellement égales) donc la forme $a\ (x - x_1)\ (x - x_2)$ l'est.

Définition. Soient f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines x_1 et x_2.

La forme $a\ (x - x_1)\ (x - x_2)$ est appelée **la** forme factorisée du polynôme.

Par exemple, le polynôme $6x^2 - 18x + 12$ admet différentes expressions factorisées, comme $(6x - 6)(x - 2)$, $(x - 1)(6x - 12)$, $2(3x - 3)\ (x - 2)$ ou encore $6(x - 1)(x - 2)$ mais c'est uniquement cette dernière qu'on appellera **la** forme factorisée du polynôme $6x^2 - 18x + 12$.

Lorsque le polynôme ne possède pas de racines, on dit simplement qu'il n'est pas factorisable : la forme factorisée n'existe pas.

Exemple 4. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Déduire des exemples 1 et 3 la forme factorisée de ce polynôme.

Méthode : Pour factoriser une fonction polynôme du second degré, on peut utiliser ses racines.

IV. Signe d'un polynôme ayant deux racines

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines x_1 et x_2 avec $x_1 \leq x_2$.

$f(x)$ est du même signe que a sur $]-\infty\ ; x_1 [\ \cup\ ] x_2 ; +\infty\ [$ (à l'extérieur des racines).

$f(x)$ est de signe opposé à a sur $] x_1 ; x_2 [$ (entre les racines dans le cas où $x_1 \neq x_2$).

Démonstration. On distingue deux cas selon le signe de a.

Si $a > 0$, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$-$		$-$		$-$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc, dans les deux cas, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et de signe opposé à l'intérieur (si $x_1 = x_2$, la colonne centrale doit juste être supprimée), ce qui démontre le théorème.

Ce théorème permet de raccourcir considérablement l'étude du signe d'un polynôme du second degré.

Exemple 5. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Étudier son signe.

Méthode : Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée,
on peut utiliser le théorème.

Second degré : forme factorisée

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas que les choses sont difficiles. » Séneque

Exercice 1

1. Montrer que 3 est une racine de la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = x^2 + 3x - 18$.
2. Calculer le produit de ses racines et en déduire la seconde racine de ce polynôme.
3. Donner alors sa forme factorisée.

Exercice 2

Le bénéfice, en millier d'euros, d'une entreprise est modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

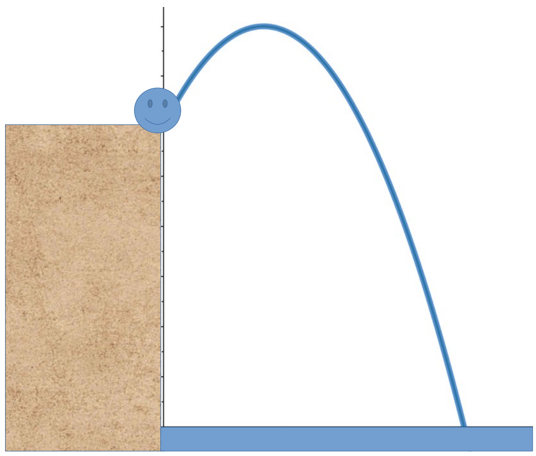
$$f(x) = -2x^2 + 16x - 24$$

où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaines.

1. Montrer que 2 est une racine de f.
2. Calculer la somme des racines et en déduire la seconde racine de f.
3. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
4. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat pour l'entreprise.
5. Dresser le tableau de signes de $f(x)$. En déduire la quantité d'objets que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.

Exercice 3

Un plongeon du haut d'une petite falaise est modélisé par la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ qui représente la hauteur, en mètres, du plongeur représenté par un point en fonction de la distance horizontale parcourue, en mètres. Lorsque x est égal à 0, le plongeur est au sommet de la falaise.



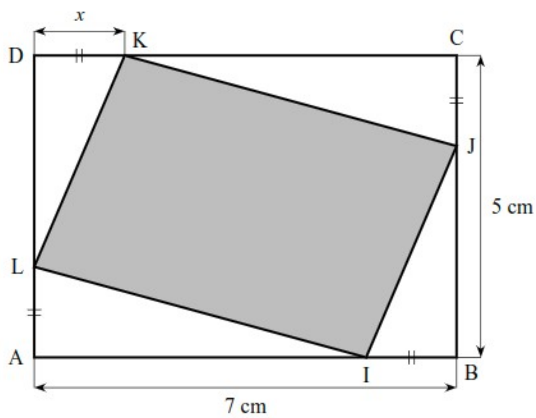
1. Montrer que -1 est une racine de f.
2. Calculer la somme et le produit des racines et en déduire la seconde racine de f.
3. Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.
4. Quelle est la hauteur de la falaise ?
5. À quelle distance de la falaise le plongeur pénètre-t-il dans l'eau ? Expliquer.

Exercice 4

Sur la figure suivante, ABCD est un rectangle d'aire égale à 35 cm^2.

x désigne un réel compris entre 0 et 5.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la ou les valeurs de x pour lesquelles le parallélogramme IJKL a une aire de 25 cm^2.



1. Exprimer la somme des aires des triangles LDK, KCJ, JBI et IAL en fonction de x et en déduire que l'aire A du parallélogramme IJKL en fonction de x est :
$$A(x) = 2x^2 - 12x + 35.$$
2. Montrer que l'équation $A(x) = 25$ est équivalente à l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$.
3. Déterminer une racine simple du polynôme $x^2 - 6x + 5$.
4. Calculer la somme et le produit des racines du polynôme $x^2 - 6x + 5$ et en déduire la seconde racine.
5. Résoudre le problème.

Second degré : forme canonique et équations

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Activité. Au IX siècle, le calife Al-Mamum réunit à Bagdad les scientifiques Perses. À sa demande, Al-Khwarizmi (780-850) a rédigé un traité sur la résolution d'équations. Voici le genre d'équation qu'on y trouve : « *Un carré moins 6 racines sont égaux à 91* » ce qui s'écrit aujourd'hui $x^2 - 6\,x = 91$. Il cherche donc à résoudre l'équation :

$$x^2 - 6\,x - 91 = 0.$$

Pas de racine évidente, pas d'identité remarquable apparente, on est bloqués. Al-Khwarizmi invente alors une méthode appelée « complétion du carré ». Voici le principe :

1. Il remarque que $x^2 - 6\,x$ est le début de $(x-3)^2$. Trouver le nombre c tel que :

$$x^2 - 6\,x = (x-3)^2 + c$$

2. Que devient alors l'équation qu'il cherche à résoudre ?
3. Quelle racine positive Al-Khwarizmi obtient-il ? Vérifier.
4. L'absence des nombres négatifs à l'époque l'empêchait de découvrir une autre racine : laquelle ? Vérifier.

Second degré : forme canonique et équations

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

I. Forme canonique d'un polynôme

Théorème. Soient f une fonction polynôme du second degré avec a le coefficient de x^2.

Il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Démonstration. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

En notant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient la forme recherchée.

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré.

La forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ de $f(x)$ est appelée la forme canonique du polynôme.

Exemple 1. Écrire sous forme canonique le polynôme $x^2 - 4x + 8$.

II. Équations du second degré

Définition. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du polynôme et il est noté Δ.

Δ se lit « delta », c'est la lettre majuscule « d » en grec.

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.

Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ permet de déterminer le nombre de racines du polynôme :

- si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines égales à $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, le polynôme admet une unique racine (une racine double) égale à $-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet aucune racine.

Démonstration. D'après la démonstration du théorème concernant l'existence de la forme canonique, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ ce qui donne : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{(2a)^2}$.

Si $\Delta < 0$, on cherche x tel que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < 0$, ce qui est impossible.

Si $\Delta = 0$, on cherche x tel que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ce qui donne $x + \dfrac{b}{2a} = 0$ soit $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, on cherche x tel que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, ce qui donne $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

soit $x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x^2 - 2x + 3 = 0$ et $x^2 - x - 1 = 0$.

III. FACTORISATION D'UN POLYNÔME

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients et Δ son discriminant.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne peut être factorisé ;
- si $\Delta = 0$, la forme factorisée est $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 désigne la racine double de f ;
- si $\Delta > 0$, la forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 désignent les deux racines de f.

Exemple 3. Factoriser si possible la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$.

IV. SIGNE D'UN POLYNÔME

Théorème : soient f une fonction polynôme du second degré et Δ son discriminant.

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du même signe que a sur $\mathbb{R}$;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du même signe que a sur $\mathbb{R}$ (sauf en $-\frac{b}{2a}$ où $f(x) = 0$) ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du même signe que a à l'extérieur des racines (et de signe opposé à a entre les racines).

Exemple 4. Donner le signe de la fonction f définie à l'exemple 3.

Pour conclure sur l'étude algébrique des fonctions polynômes du second degré, dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations), on cherchera d'abord la forme du polynôme la plus adaptée :

- la forme développée réduite
- la forme canonique
- la forme factorisée (si elle existe)

Second degré : forme canonique et équations

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Exercice 1

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $x^2 - 10x - 12 = 0$ c) $2x^2 - 14x + 24{,}5 = 0$

Exercice 2

Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

a) $x^2 - x + 2$ b) $x^2 - 5x - 3$ c) $2x^2 + 5x + 3{,}125$

Exercice 3

Dresser le tableau de signes des polynômes suivants :

a) $x^2 + 2x + 3$ b) $x^2 - 10x - 12$ c) $2x^2 - 14x + 24{,}5$

Exercice 4

1. Écrire sous forme canonique les polynômes suivants :

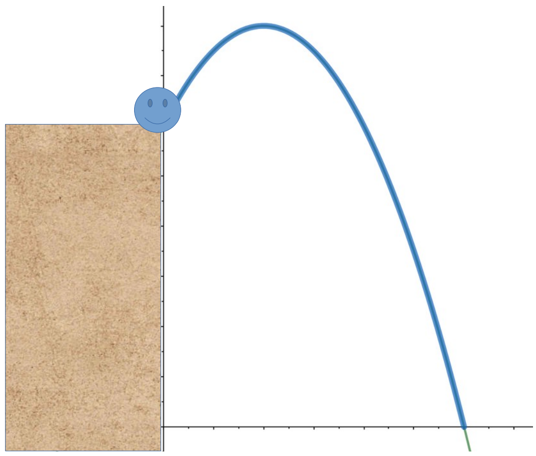
a) $x^2 + x + 1{,}25$ b) $x^2 - 10x + 3$ c) $2x^2 - 16x + 4$

2. En déduire le minimum ou le maximum de chaque polynôme.

Exercice 5

Un plongeon du haut d'une falaise est modélisé par une fonction h qui donne la hauteur du plongeur (assimilé à un point) en fonction de la distance horizontale x parcourue, en mètres. Cette fonction est définie pour tout réel x positif par :

$$h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}3x + 7$$



1. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.
2. En déduire la forme factorisée de $h(x)$.
3. Montrer que la forme canonique de h est :

$$h(x) = -0{,}1\,(x - 1{,}5)^2 + 7{,}225$$

4. Déterminer la hauteur de la falaise.
5. Déterminer la distance à laquelle le plongeur pénètre dans l'eau.
6. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le plongeur ?

Exercice 6

Le bénéfice, en dizaines de milliers d'euros, d'une entreprise est modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaines.

1. Quel est le bénéfice de l'entreprise lorsqu'elle ne vend aucun objet ? Et lorsque qu'elle en vend 300 ?

2. a. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

   b. Déterminer le signe de $f(x)$ et en déduire le nombre d'objets que doit fabriquer et vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.

   b. Donner la forme factorisée de $f(x)$.

3. a. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

   b. En déduire le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise et le nombre d'objet vendus pour lequel il est atteint.

Exercice 7

1. La forme canonique du polynôme défini sur IR par $2x^2 - 8x + 6$ est :

a) $2(x-2)^2 + 2$ b) $2(x-2)^2 + 10$ c) $2(x-2)^2 - 14$ d) $2(x-2)^2 - 2$

2. Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$. On considère l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in$ IR. L'ensemble des solutions de cette équation est :

a) $\varnothing$ b) $\{2 - \sqrt{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\}$ c) $\{2 - \sqrt{6}\ ;\ 2 + \sqrt{6}\}$ d) $\{4 - 2\sqrt{2}\ ;\ 4 + 2\sqrt{2}\}$

3. On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur IR par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle :

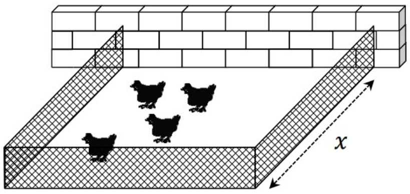
a) $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$ b) $]-1\ ;\ 3[$ c) $]-\infty\ ;\ -3[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ d) $]-3\ ;\ 1[$

Exercice 8

Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur de sa ferme afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos.

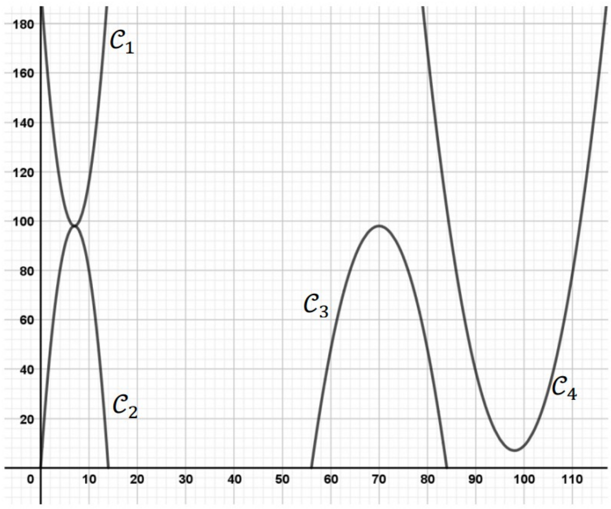
Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale.

On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.



On appelle A la fonction qui à un nombre x associe $A(x)$ l'aire de l'enclos. La fonction A est ainsi définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 14]$.

1. a. Vérifier que l'aire $A(x) = -2x^2 + 28x$.
   b. Déterminer la forme canonique de $A(x)$.
2. Quatre courbes ont été tracées sur le graphique. Identifier celle qui représente la fonction A. *Justifier.*
3. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Donner la valeur de cette aire.



Exercice 9

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On admet que f est dérivable sur IR et on note f' sa fonction dérivée.

Déterminer une expression de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

2. On note T la tangente à C_f au point d'abscisse -1.

Donner l'équation réduite de la tangente T.

3. Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$.

On note C_g sa courbe représentative dans le même repère que la courbe C_f.

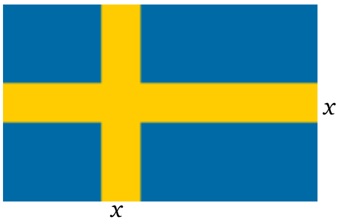
a. Calculer, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x)$.

b. Étudier sur IR le signe de $f(x) - g(x)$.

c. En déduire pour quelles valeurs de x la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g.

Exercice 10

Voici un drapeau composé d'un fond bleu et d'une croix jaune. La bande jaune horizontale à la même largeur x que la bande jaune verticale. Le drapeau mesure 8 dm sur 5 dm.



Quelles peuvent être les valeurs de x pour que l'aire de la croix jaune soit égale à l'aire du fond bleu ?

Corrigé exercice 6

1. $f(0) = -2$ donc le bénéfice de l'entreprise lorsqu'elle ne vend aucun objet est égal à $-20\,000$ €.

$f(3) = -5$ donc lorsque qu'elle en vend 300, son bénéfice est $-50\,000$ €.

2. a. Les solutions sont 0,5 et 2.

b. $f(x) < 0$ sur $[0\,;0{,}5[\cup]2\,;\,3]$ et $f(x) > 0$ sur $]0{,}5\,;\,2[$ donc l'entreprise doit fabriquer et vendre entre 50 et 200 objet pour réaliser un bénéfice positif.

b. $f(x) = -2(x - 0{,}5)(x - 2)$

3. a. $f(x) = -2\,(x - 1{,}25)^2 + 1{,}125$

b. Le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise est 11 250 € pour 125 objets vendus.

Corrigé exercice 7

1. La forme canonique du polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $2x^2 - 8x + 6$ est : d) $2(x-2)^2 - 2$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$. On considère l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de cette équation est :

a) $\varnothing$ b) $\{2 - \sqrt{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\}$ c) $\{2 - \sqrt{6}\ ;\ 2 + \sqrt{6}\}$ d) $\{4 - 2\sqrt{2}\ ;\ 4 + 2\sqrt{2}\}$

3. On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle :

a) $]-\infty\,;\,-1[\ \cup\ ]3\,;\,+\infty[$ b) $]-1\,;\,3[$ c) $]-\infty\,;\,-3[\ \cup\ ]1\,;\,+\infty[$ d) $]-3\,;\,1[$

SECOND DEGRÉ : PARABOLES

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

I. SOMMET D'UNE PARABOLE

Définition. Une parabole est la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.

Une parabole admet donc une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Théorème. Soit f une fonction polynôme du second degré et C sa courbe représentative.

Le polynôme atteint son extremum en $x = -\dfrac{b}{2a}$. Si $a < 0$, il s'agit d'un maximum et, si $a > 0$, il s'agit d'un minimum.

Démonstration. Considérons une fonction f polynôme du second degré : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f\,'(x) = 2ax + b$ (on remarque que $f\,'$ est une fonction affine de coefficient directeur $2a$).

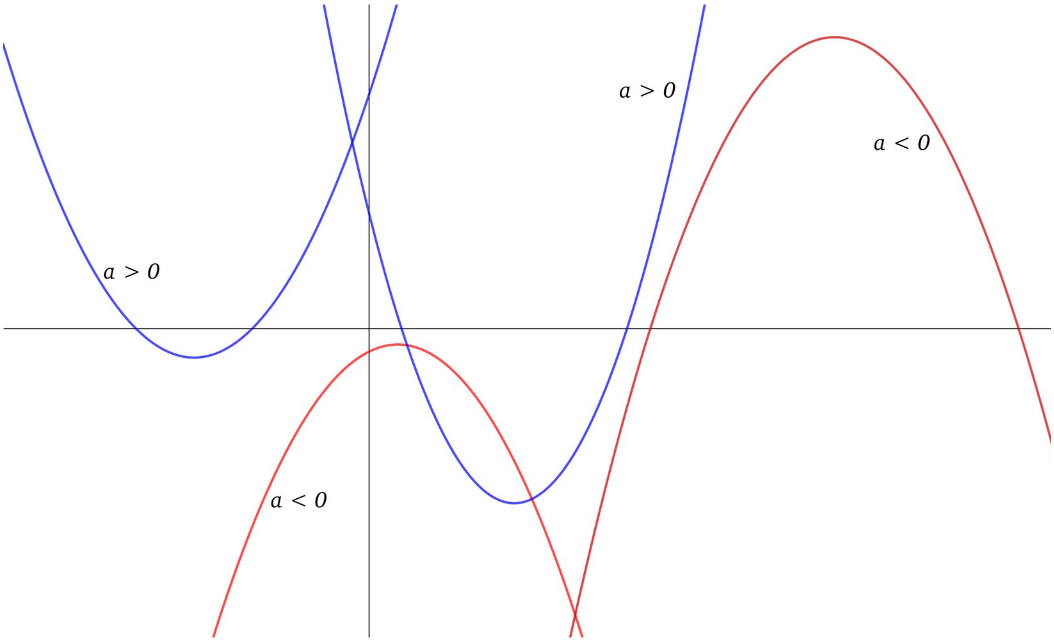
D'une part, $f\,'(x)$ s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$ en changeant de signe : le polynôme atteint donc son extremum en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

D'autre part, le signe de $f\,'(x)$ dépend du signe de a.

Si $a < 0$, le coefficient directeur $2a$ est aussi négatif. Il s'ensuit que $f\,'(x) > 0$ pour $x < -\dfrac{b}{2a}$ et $f\,'(x) < 0$ pour $x > -\dfrac{b}{2a}$. Par suite, f est donc croissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{2a}\right[$ et elle est décroissante sur $\left]-\dfrac{b}{2a}\,;+\infty\right[$. Si $a < 0$, l'extremum est un maximum.

Et si $a > 0$, on obtient de façon analogue que l'extremum est un minimum.

Les courbes représentatives des fonctions polynômes du second degré n'ont donc que deux allures possibles qui dépend du signe de a.



Définition. Le point de la courbe C d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$ est appelé le sommet de C.

Le sommet appartient à la parabole donc son ordonnée est l'image de $-\dfrac{b}{2a}$ par la fonction polynôme du second degré.

Exemple 1. Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Solution. L'abscisse de S est $-\dfrac{-2}{2\times 1} = 1$ et son ordonnée est $f(1) = 1^2 - 2\times 1 + 5 = 4$ donc S(1 ; 4).

II. Axe de symétrie d'une parabole

Théorème. Soit la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$).

La parabole admet la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.

Démonstration. Pour montrer que la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie, on peut montrer que :

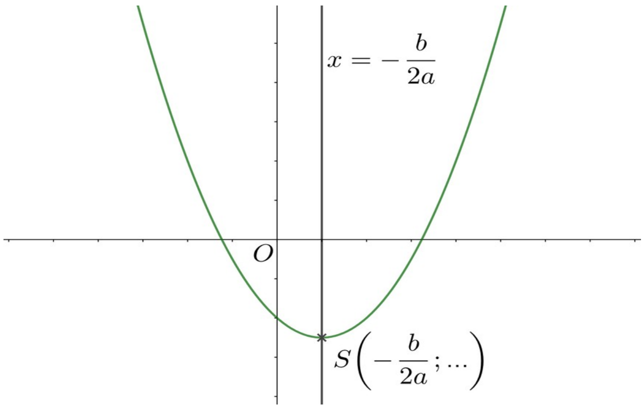
$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right) = f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)$$

Graphiquement : des points dont les abscisses sont symétriques par rapport à $-\dfrac{b}{2a}$ doivent avoir la même ordonnée.

D'après la démonstration de la forme canonique, on a : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$. Donc :

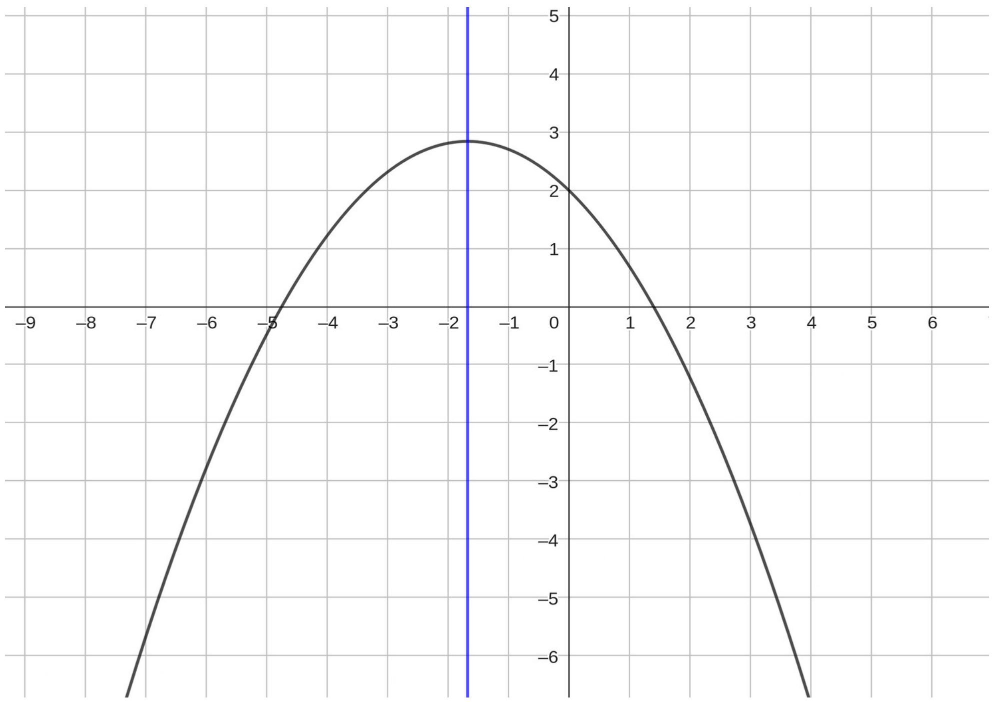
$f\left(-\dfrac{b}{2a}+x\right) = ax^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$ et $f\left(-\dfrac{b}{2a}-x\right) = a(-x)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a} = ax^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a}$ d'où l'égalité.

En résumé (si $a > 0$) :



Exemple 2. Déterminer une équation de l'axe de symétrie d de la parabole d'équation $y = -0{,}3x^2 - x + 2$.

Solution. $-\dfrac{-1}{2\times(-0{,}3)} = -\dfrac{1}{0{,}6} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$ donc l'axe de symétrie d a pour équation $x = -\dfrac{5}{3}$.



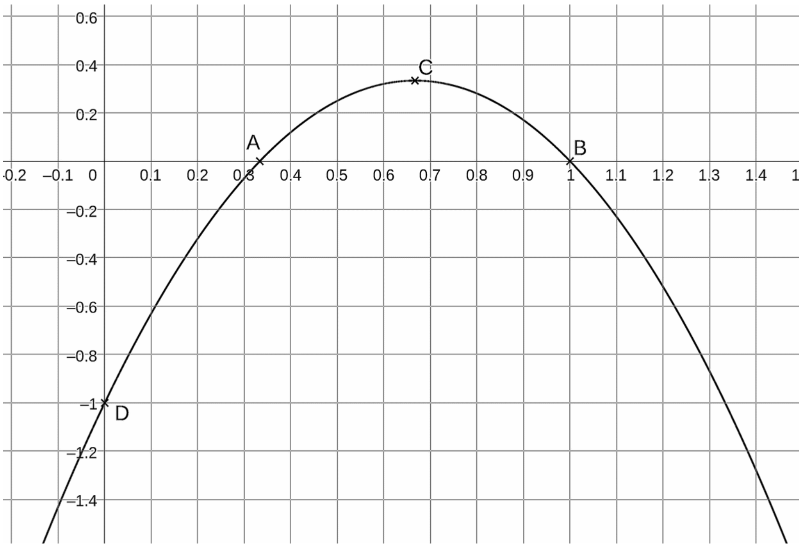
Second degré : Paraboles

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$. On a tracé ci-dessous la parabole C_f représentative de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les coordonnées du point D intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du sommet C de la parabole.
4. Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la parabole et tracer cet axe.
5. Déterminer une équation de la tangente en D à la parabole et tracer cette tangente.



Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 3x - 1{,}5$. On a tracé ci-dessous la parabole C_f représentative de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les coordonnées du point D intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
3. Déterminer les coordonnées du sommet C de la parabole.
4. Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la parabole et tracer cet axe.
5. Déterminer une équation de la tangente en D à la parabole et tracer cette tangente.