La dérivation

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Point de vue local

- Activités
- Cours
- Exercices

2. Point de vue global

- Activités
- Cours
- Exercices

3. Variations et extremums

- Activités
- Cours
- Exercices

Dérivation : Point de vue local

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. » Alexandre Grothendieck

Introduction. Le grand mystère des mathématiques (26') jusqu'à 32 min 30 s.

On place une boule en haut d'une rampe et on mesure la distance parcourue en fonction du temps.

Temps x (en s)	0	1	2	3
Distance parcourue (en m)	0	0,40	1,60	3,60

D'après ce relevé, la distance parcourue est bien proportionnelle au carré du temps. On en déduit l'expression algébrique de la fonction f qui permet d'obtenir la distance parcourue par la boule en fonction du temps x :

$$f(x) = 0{,}4\,x^2 .$$

1. On s'intéresse à la vitesse moyenne de la boule lors du parcours. La vitesse moyenne est le rapport entre la distance parcourue et le temps du parcours. Déterminer la vitesse moyenne en m/s de la boule entre 1 s et 3 s.

2. On cherche maintenant à calculer la vitesse de la boule à l'instant $x = 1$ s : on l'appelle la vitesse instantanée. Pour cela, on va calculer la vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus réduit :

a. Déterminer la vitesse moyenne en m/s de la boule entre 1 s et 2 s, puis entre 1 s et 1,1 s, puis entre 1 s et 1,01 s et enfin entre 1 s et 1,001 s.

b. Vers quelle valeur semble tendre cette vitesse moyenne ?

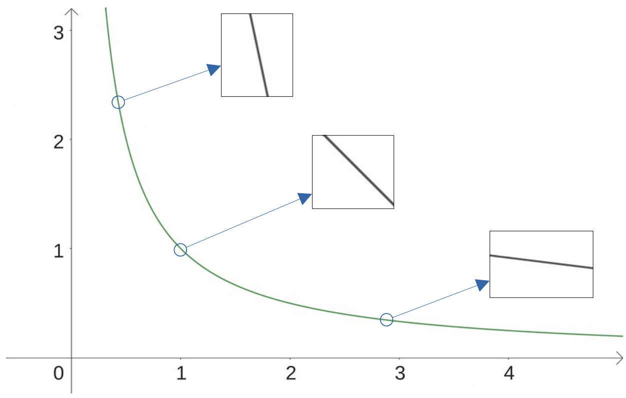
DÉRIVATION : POINT DE VUE LOCAL

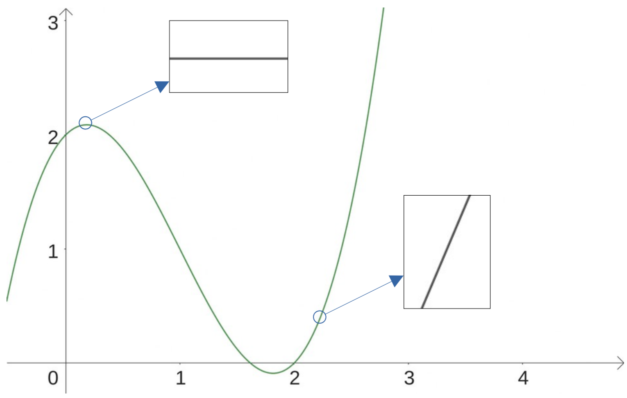
« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. » Alexandre Grothendieck

La pente d'une droite, son coefficient directeur, c'est une notion bien connue, c'est entendu. Mais si on veut essayer de généraliser à d'autres courbes, c'est tout de suite une autre paire de manches. D'abord, une courbe (on supposera pour simplifier le propos qu'on exclut les droites), ça change constamment : ça peut être par endroit très pentu, et pas du tout à d'autres. Si parfois ça descend, parfois, ça monte. Ce n'est pas fixé comme pour une droite.

La pente n'est pas la même partout, c'est sûr. Pourtant, on sent bien qu'à un endroit précis, une courbe monte ou descend et elle est plus ou moins pentue. **La pente d'une courbe dépend de l'endroit précis où l'on se place.**

Pour mieux comprendre l'idée de pente, prenons des courbes et observons-les. En voici deux ci-dessous (d'équations $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$), mais on peut bien sûr le faire avec toutes celles qu'on connaît. Choisissons quelques lieux et zoomons sur chacun d'eux, zoomons, zoomons…





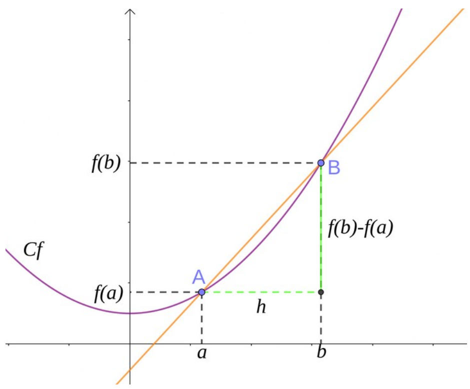
Voilà qui est pour le moins inattendu : à chaque fois, en zoomant suffisamment sur un point, on dirait qu'on obtient... une droite. Ce n'est pas vraiment une droite bien sûr, puisque c'est une courbe. Mais ça s'en rapproche. Sacrément même. Si on zoome assez, on peut pas faire la différence : la courbe devient presque droite. On part alors de cette idée que **la pente d'une courbe (en un point), c'est la pente de la droite obtenue en zoomant indéfiniment sur ce point**, et on l'obtient à partir du calcul de la pente d'une sécante à la courbe.

I. TAUX DE VARIATION D'UNE FONCTION ET SÉCANTE À UNE COURBE

Définition. Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux réels appartenant à I.

Le taux de variation de f entre a et b est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ce taux de variation est la pente de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points de la courbe d'abscisses a et b.



Exemple 1. Calculer le taux de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) entre 1 et 5.

II. Nombre dérivé d'une fonction en un réel et tangente à une courbe en un point

Définitions. S'il existe*, le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, est :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On dit alors que f est dérivable en a.

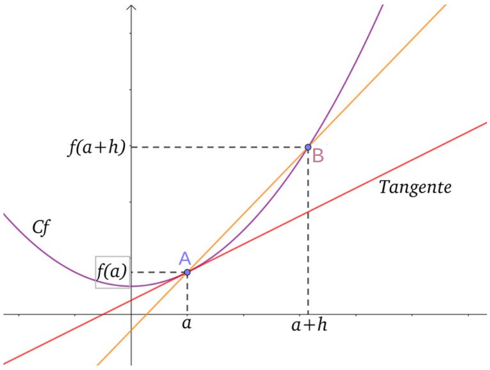
Exemple 2. À partir de la définition, calculer le nombre dérivé de la fonction carré en 2.

Méthode : pour calculer un nombre dérivé à partir de la définition, on peut commencer par calculer le taux de variation entre *a et $a+h$.*

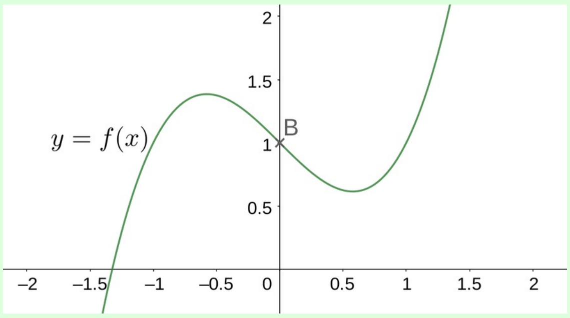
Définition. Soient f une fonction dérivable en a, C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal et A le point de la courbe d'abscisse a.

On appelle tangente à la courbe C_f au point A la droite qui passe par A et qui a pour pente $f'(a)$.

Sur une représentation graphique*, la tangente à la courbe en a est la limite des sécantes (AB) lorsque le point B tend le point A.



Exemple 3. On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f. On donne $f'(0) = -1$.

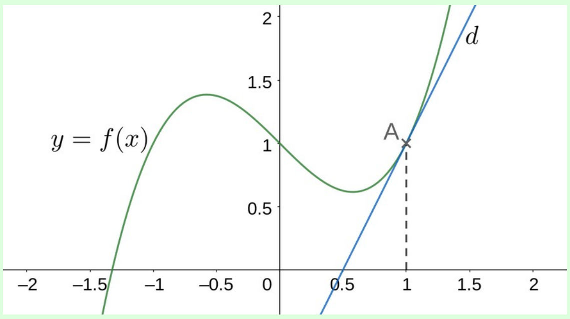


Construire la tangente à la courbe en B.

Méthode : pour construire une tangente connaissant le nombre dérivé,

on peut tracer la droite qui passe par le point de la courbe correspondant et qui a pour pente le nombre dérivé.

Exemple 4. On a tracé la courbe représentative d'une fonction f et sa tangente en A, le point de la courbe d'abscisse 1.

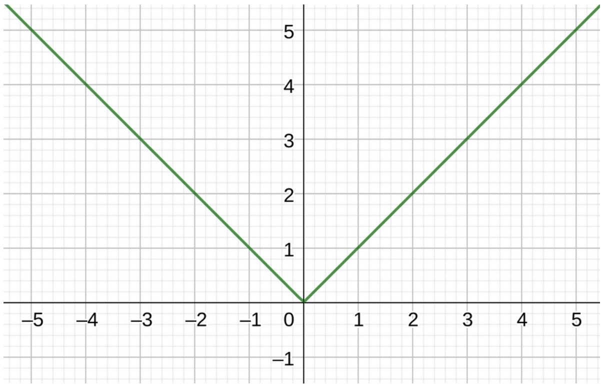


Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.

Méthode : pour déterminer graphiquement un nombre dérivé, on peut déterminer la pente de la tangente.

Il est temps de faire une petit remarque : il existe des fonctions qui ne sont pas dérivable en certain point. Il faut juste le savoir même si les fonctions étudiées en première le sont toutes à deux exceptions près : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car son taux de variation entre 0 et $0+h$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. Mais en dehors de ce point, elle est dérivable pour tout réel strictement positif. Et la fonction valeur absolue – ou distance à 0 – ($f(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = -x$ si $x < 0$ et on la note $f(x) = |x|$). Sur la courbe représentative, en 0, on aura beau zoomer, la courbe ressemblera toujours à un « v », jamais à une droite : elle n'admet pas de tangente en 0.

Courbe représentative de la fonction valeur absolue



Cette remarque étant faite, reprenons notre étude des tangentes.

Théorème. Soient f une fonction dérivable en a et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal. La tangente à C_f au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)\ (x - a) + f(a).$$

Démonstration. $f'(a)$ est la pente de la tangente donc son équation réduite $y = m\,x + p$ est de la forme :

$$y = f'(a)\ x + p \qquad (1)$$

Il reste à déterminer p. Mais la tangente passe par le point A. Ses coordonnées $(a\ ;f(a))$ vérifient donc l'équation (1), ce qui donne :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

On obtient ainsi :

$$p = f(a) - f'(a)\times a$$

que l'on peut injecter dans l'équation (1) :

$$y = f'(a)\ x + f(a) - f'(a)\times a$$

et après réorganisation et factorisation par $f'(a)$, on obtient l'équation :

$$y = f'(a)\ (x - a) + f(a)$$

Exemple 5. Déterminer l'équation de la tangente en 2 à la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 2\,x^2 - 1$ sachant que $f'(2) = 8$.

Méthode : pour déterminer l'équation d'une tangente connaissant le nombre dérivé correspondant, on peut utiliser le théorème.

Pour conclure sur ce point de vue local de la dérivation, le taux de variation et le nombre dérivé peut être illustrés dans des contextes variés :

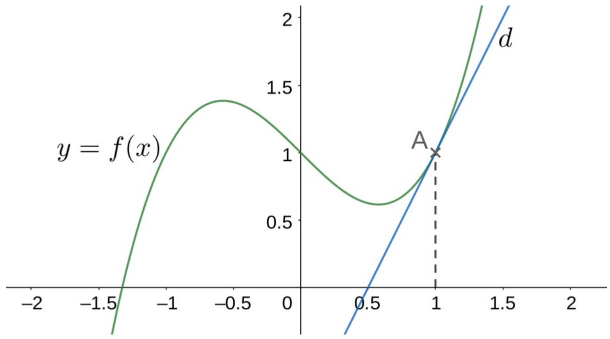
- en géométrie, le taux de variation représente la pente d'une sécante tandis que le nombre dérivé représente la pente d'une tangente
- en cinématique (étude physique des mouvements), le taux de variation peut être interprété comme une vitesse moyenne tandis que le nombre dérivé peut être interprété comme une vitesse instantanée
- dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal (notion que nous découvrirons plus tard)

Exemple 6. On place une boule en haut d'une rampe et on mesure la distance parcourue en fonction du temps. La fonction f définie pour x positif par $f(x) = 0{,}4\,x^2$ permet d'obtenir la distance parcourue par la boule, en m, en fonction du temps x, en s. On a calculé le nombre dérivé de f en 2 et obtenu : $f'(2) = 1{,}6$. Interpréter ce résultat.

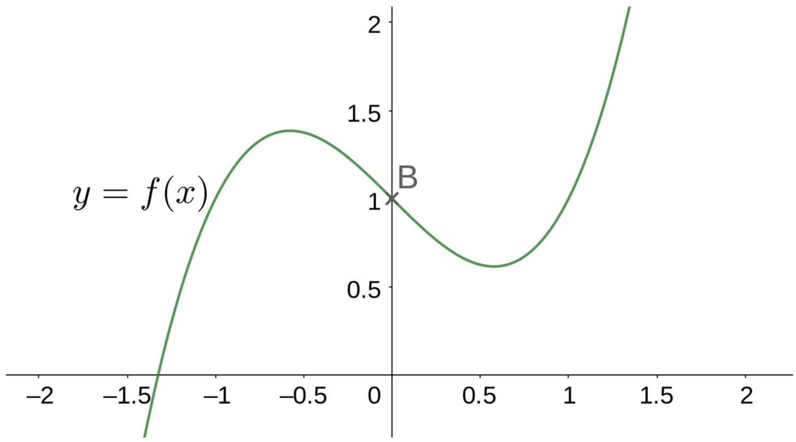
Méthode : pour interpréter un nombre dérivé en contexte, on peut commencer par identifier ce contexte.

Dérivation : Point de vue local (exemples)

Exemple 3.

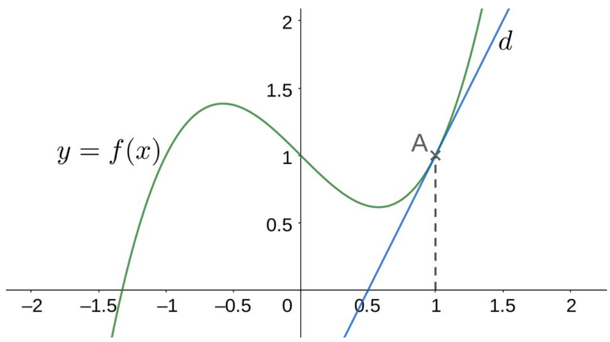


Exemple 4.

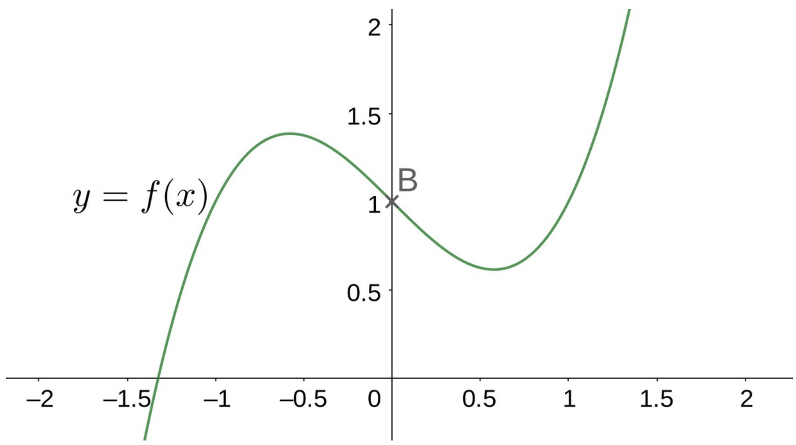


Dérivation : Point de vue local (exemples)

Exemple 3.



Exemple 4.

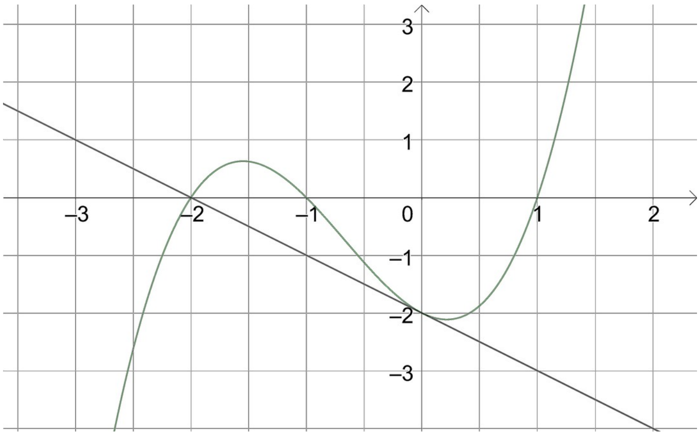


Dérivation : Point de vue local

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. » Alexandre Grothendieck

Exercice 1

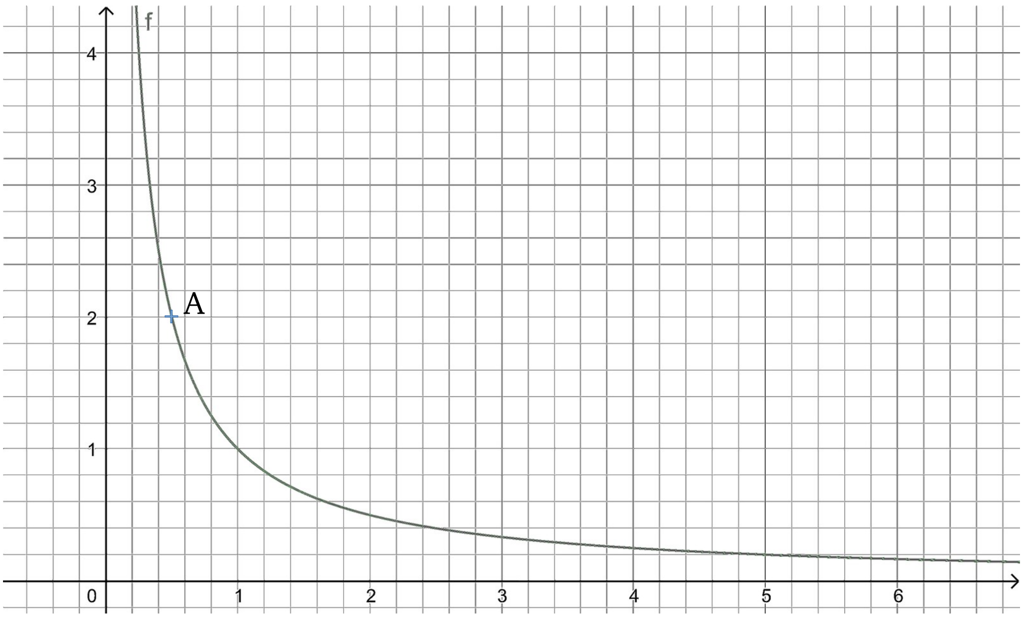
On a tracé la courbe représentative d'une fonction f et sa tangente en $x = 0$.



1. On donne $f(1{,}25) = 2$. Calculer le taux de variation de f entre 0 et 1,25.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé de f en 0.
3. Construire la tangente à la courbe représentative de la fonction f en -2 sachant que $f'(-2) = 3$.

Exercice 2

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et A le point de la courbe représentative de f d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.



1. La tangente à la courbe représentative de f en A passe par le point de coordonnées (1 ; 0). Tracer cette tangente et déterminer son équation réduite.
2. Le nombre dérivé de f en 1 est : $f'(1) = -1$. Tracer la tangente à la courbe représentative de f en 1 et déterminer son équation.
3. Tracer la droite d'équation $y = -0{,}25x + 1$. Cette droite semble-t-elle tangente à la courbe représentative de f ?

Exercice 3

On place une boule en haut d'une rampe de 10 m. À l'instant $t = 0$ s, on la lâche et on mesure la distance parcourue en fonction du temps. L'expression algébrique de la fonction d qui permet d'obtenir la distance parcourue en m par la boule en fonction du temps t en s est :

$$d(t) = 0{,}4\, t^2 .$$

1. Déterminer la durée du parcours.
2. Calculer la vitesse moyenne en m/s durant son parcours.
3. On cherche à déterminer la vitesse à laquelle la boule atteint le bout de la rampe.
   a. Exprimer le taux de variation de d entre 5 et $5+h$ en fonction de h et réduire l'expression obtenue.
   b. En déduire $d'(5)$.
   c. Interpréter le résultat obtenu.

Dérivation : Point de vue global

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. » Alexandre Grothendieck

Activité. Sur la lune, on place une grue et on lâche un marteau du haut de cette grue. La pesanteur lunaire étant moindre que celle de la terre, la chute libre d'un objet est plus lente : la distance d en m parcourue par le marteau en fonction du temps t en s est donnée par :

$$d(t) = t^2$$

1. Le marteau met 8,3 s à atteindre le sol lunaire. Quelle est la hauteur de la grue ?

2. À l'instant $t = 0$, la vitesse instantanée du marteau est nulle.

   a. En utilisant la définition du nombre dérivé (calculer et simplifier d'abord le taux de variation de d entre 1 et $1+h$), vérifier que la vitesse instantanée du marteau à l'instant $t = 1$ est égale à 2 m/s.

   b. Calculer et simplifier le taux de variation de d entre 2 et $2+h$ et en déduire la vitesse instantanée du marteau à l'instant $t = 2$.

   c. Calculer de même la vitesse instantanée du marteau à l'instant $t = 3$.

3. a. À l'aide des questions 2. a, 2. b, et 2. c, conjecturer une expression de la vitesse instantanée du marteau en fonction de l'instant t en s.

   b. Prouver cette conjecture.

Interview d'Isaac Newton

Dérivation : Point de vue global

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. » Alexandre Grothendieck

Le nombre dérivé d'une fonction est une notion locale : on se focalise sur un point particulier. Voyons maintenant si on peut prendre de la hauteur et avoir un point de vue global.

En calculant le nombre dérivé de la **fonction carré** ($f(x) = x^2$) en quelques points, on obtient :

$$f'(1) = 2, f'(2) = 4, f'(3) = 6, \dots$$

Il semble se dégager une relation générale toute simple entre un nombre x et le nombre dérivé correspondant $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x$$

En prouvant cette relation, on éviterait le calcul fastidieux et répétitif de chaque nombre dérivé de la fonction carré. Le taux de variation de la fonction carré entre un nombre x quelconque et $x+h$ est :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{2xh+h^2}{h}\\ &= 2x+h\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, ce taux donne :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h \quad = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

Cette relation générale entre un nombre réel x quelconque et le nombre dérivé de la fonction carré en x est remarquable de simplicité et elle est si pratique et tellement utile qu'on en fait un **théorème**.

La fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre dérivée de la fonction carré $f'(x) = 2x$ est appelée **fonction dérivée de la fonction carré**.

Désormais, pour obtenir un nombre dérivé de la fonction carré en un point, il sera bien plus commode d'utiliser la fonction dérivée plutôt que de passer par la limite du taux de variation. On veut le nombre dérivé de la fonction carré en 5 ? Facile : $f'(5) = 2 \times 5 = 10$. Et en – 4 ? Tout aussi simple : $f'(-4) = 2 \times (-4) = -8$.

Peut-on faire la même chose avec d'autres fonctions, à commencer par les fonctions de référence (celles qui permettent de construire toutes les fonctions) : la **fonction constante** ($f(x) = c$, c constante réelle), **identité** ($f(x) = x$), **cube** ($f(x) = x^3$), **puissance** ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), **inverse** ($f(x) = \frac{1}{x}$) et **racine carrée** ($f(x) = \sqrt{x}$) ?

Le principe est toujours le même : on calcule le taux de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ qu'on simplifie au mieux pour pouvoir ensuite déterminer le nombre dérivé en passant à la limite lorsque h tend vers 0 : $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Pour la **fonction constante** ($f(x) = c$, c constance réelle), on établit d'abord que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 (il n'y a rien à faire) :

$$f'(x) = 0$$

Pour la **fonction identité** ($f(x) = x$), on établit d'abord que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 (il n'y a pas plus à faire) :

$$f'(x) = 1$$

Pour la **fonction cube** ($f(x) = x^3$), on établit d'abord que (le lecteur est invité à retrouver ce résultat)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \ldots = 3x^2 + 3xh$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 (un petit truc à faire) :

$$f'(x) = 3x^2$$

Pour les **fonctions puissance** ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), c'est assez technique en première mais il existe une méthode en terminale qui permet d'obtenir le résultat suivant très facilement, qui sera admit :

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

On remarquera que pour $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve les fonctions dérivées des fonctions carré et cube.

Pour la **fonction inverse** ($f(x) = \frac{1}{x}$), on établit d'abord que (la même invitation est lancée au lecteur)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \ldots = -\frac{1}{x^2+xh}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Et pour la **fonction racine carrée** ($f(x) = \sqrt{x}$), on établit d'abord que (c'est peut-être la plus jolie preuve de toute) :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

I. Fonction dérivée

On a vu dans l'introduction que la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre dérivée de la fonction carré $f'(x) = 2x$ est appelée **fonction dérivée de la fonction carré**.

D'une manière générale, la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre dérivée d'une fonction donnée est appelée **fonction dérivée** de la fonction donnée.

Définitions. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en chaque réel x de I.

La fonction, notée f', qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

À l'usage, on abrégera souvent l'expression **fonction dérivée d'une fonction** en **dérivée** tout simplement : par exemple, on dira « la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2\,x$ » au lieu de dire « la fonction dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2\,x$ ».

II. Fonctions dérivées de référence

Les résultats remarquables obtenus ci-dessus sont regroupés dans un tableau qui constitue ainsi une liste de théorème à connaître.

Théorèmes. c désigne un nombre réel et n désigne un entier naturel.

Fonction	Domaine de définition	$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
constante	$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$
identité	$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
carré	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
cube	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
puissance n	$\mathbb{R}$	x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
inverse	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
racine carrée	$[0\,;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Démonstrations. Voir l'introduction. La remarque pour les fonctions puissance vaut aussi pour la dernière ligne du tableau : la démonstration niveau terminale est plus simple et le résultat sera admit.

On rappelle que pour tout réel x non nul : $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ et plus généralement $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier naturel). En conséquence, la ligne de la dérivée des fonctions puissance n peut s'étendre à n entier strictement négatif.

III. Opérations sur les fonctions dérivables

Nous avons vu que les fonctions de référence étaient dérivables sur leur ensemble de définition (sauf les fonctions racine carrée et valeur absolue en 0 pour être précis, mais c'est un détail à notre niveau). Qu'en est-il des autres fonctions, celles qui sont construites à partir des fonctions de référence ? Pour le savoir, il faut d'abord se demander comment on construit une fonction quelconque à partir des fonctions de référence.

Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. C'est la somme de deux fonctions de référence. Peut-on obtenir la dérivée de f à partir des dérivées des fonctions carré et identité ? D'une manière générale, peut-on obtenir la fonction dérivée d'une somme de fonction ? Devinez quoi, il faut encore repasser par le taux de variation et prendre sa limite… Heureusement qu'on le fait une bonne fois pour toutes. Les résultats que l'on dégage ainsi seront retenus sous forme de théorèmes et permettront de ne plus avoir à faire ces calculs fastidieux.

On prend une fonction f qui s'écrit comme somme de deux fonctions, disons u et v : $f(x) = u(x) + v(x)$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\left(u(x+h)+v(x+h)\right)-\left(u(x)+v(x)\right)}{h}$$

$$= \frac{(u(x+h)-u(x))+(v(x+h)-v(x))}{h}$$

$$= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 (on reconnaît les taux de variations de u et de v) :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Ce qu'on peut noter :

$$\boldsymbol{f' = u' + v'}$$

Par exemple, si $f(x) = x^2 + x$ alors $f'(x) = 2x + 1$!

Mais il y a encore plus fort. Prenons un autre exemple : $f(x) = x^3 + x + 1$ et on cherche cette fois le nombre dérivé $f'(5)$. On commence par déterminer la dérivée de f. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + 1 + 0$$
$$= 3x^2 + 1$$

et ainsi

$$f'(0) = 3\times0^2 + 1$$
$$= 1$$

Et voilà, terminé en deux coups de cuiller à pot. C'est la fin des calculs fastidieux de taux de variation et de nombres dérivés.

Ce résultat est donc remarquable mérite le statut de théorème.

Un travail similaire peut ensuite être entrepris pour la **différence de deux fonctions** ($f(x) = u(x) - v(x)$), la **multiplication d'une fonction par une constante** ($f(x) = k\, u(x)$), le **produit de deux fonctions** ($f(x) = u(x)\, v(x)$), l'**inverse d'une fonction** $\left(f(x)=\frac{1}{u(x)}\right)$, le **quotient de deux fonctions** $\left(f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ et enfin, ce qui est souvent oublié, la **composée de deux fonctions**, limitée aux fonctions affines ($f(x) = u(ax + b)$) comme par exemple $f(x) = \sqrt{2x+5}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ (le cas général ($f(x) = u(v(x))$) sera vu en terminale).

Les résultats remarquables obtenus sont regroupés dans le tableau suivant qui constitue aussi une liste de théorème à connaître.

Théorèmes. u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Nature de la fonction	f	f'	**Condition**
somme	$u + v$	$u' + v'$	
différence	$u - v$	$u' - v'$	
produit par une constante	$k\,u$	$k\,u'$	
produit	$u\,v$	$u'\,v + u\,v'$	
inverse	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$ sur I
quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ sur I
composée	$u(ax + b)$	$a \times u'(ax + \mathrm{b})$	$ax+b \in$ I

Démonstrations. La dérivée de la **somme de deux fonctions** a été démontrée en introduction juste avant ce tableau. La démonstration de la dérivée de la **différence** est presque identique, seul le signe change.

Pour le **produit d'une fonction *u* par une constante *k* (*f* = *k u*)**, on établit d'abord que :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{ku(x+h)-ku(x)}{h} = k\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 :

$$f'(x) = k \times u'(x)$$

$$\boldsymbol{f' = k\,u'}$$

Pour le **produit de deux fonctions *u* et *v***, il faut s'accrocher :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(x+h)\times v(x+h)-u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)\times v(x+h)\ -\ u(x)\times v(x+h)\ +\ u(x)\times v(x+h)\ -\ u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)\times v(x+h)\ -\ u(x)\times v(x+h)}{h} + \frac{u(x)\times v(x+h)\ -\ u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)\ -\ u(x)}{h}\times v(x+h)+u(x)\times\frac{v(x+h)\ -\ v(x)}{h}\end{aligned}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 :

$$f'(x) = u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$

$$\boldsymbol{f' = u'\,v + u\,v'}$$

Pour l'**inverse d'une fonction *u***, on établit d'abord que :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{u(x+h)\times u(x)}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 :

$$f'(x) = -\ u'(x)\times\frac{1}{u(x)^2}$$

$$\boldsymbol{f' = -\frac{u'}{u^2}}$$

Pour la dérivée du **quotient de deux fonctions *u* et *v***, on peut être astucieux en écrivant $f = \frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$. On utilise alors la dérivée du produit de deux fonctions u et w avec $w = \frac{1}{v}$ et $w' = -\frac{v'}{v^2}$ d'après le théorème précédent.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}f' &= u'\,w + u\,w'\\ &= u'\times\frac{1}{v} + u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right)\\ &= \frac{u'v}{v^2} + \left(-\frac{uv'}{v^2}\right)\\ \boldsymbol{f'} &= \frac{u'v-uv'}{v^2}\end{aligned}$$

On admettra le théorème sur la **composée de deux fonctions** : la démonstration fait intervenir un changement de variable largement hors programme.

Exemple 1. Déterminer la dérivée des fonctions définies sur ℝ (f_4 sur ℝ*, f_5 sur $\mathbb{R}_+$) par les expressions suivantes :

$f_1(x) = 2$ $\quad f_2(x) = x^2$ $\quad f_3(x) = x^4$ $\quad f_4(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f_5(x) = \sqrt{x}$

Méthode : pour calculer une fonction dérivée d'une fonction de référence, on utilise le théorème correspondant.

Exemple 2. Déterminer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (f_5 sur $\mathbb{R}^*$) par les expressions suivantes :

$f_1(x) = x + 2$ $\quad$ $f_2(x) = x^2 - x$ $\quad$ $f_3(x) = 4x$ $\quad$ $f_4(x) = x^2 + 5x + 2$ $\quad$ $f_5(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$

Méthode : pour calculer une fonction dérivée,

on peut identifier les opérations sur les fonctions de référence pour appliquer les théorèmes.

Exemple 3. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)(3x - 7)$.

Exemple 4. Déterminer la dérivée de la fonction f définie pour $x \neq 1{,}5$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$.

Exemple 5. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x-3}$.

DÉRIVATION : POINT DE VUE GLOBAL

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. » Alexandre Grothendieck

Exercice 1

Cet exercice est un QCM. Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, il y a une seule bonne réponse.

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. La fonction dérivée de f sur $]1\,;+\infty[$ a pour expression :

a. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ b. $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$ c. $f'(x) = \dfrac{4x-1}{(x-1)^2}$ d. $f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

2. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = (2x-5)^3$. Une expression de la dérivée de f est :

a. $3(2x-5)^2$ b. $6(2x-5)^2$ c. $2(2x-5)^2$ d. 2^3

3. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$. Le coefficient directeur $f'(1)$ de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. 1 b. 3 c. –1 d. 0

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 5x - 4$. La tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2 a pour équation :

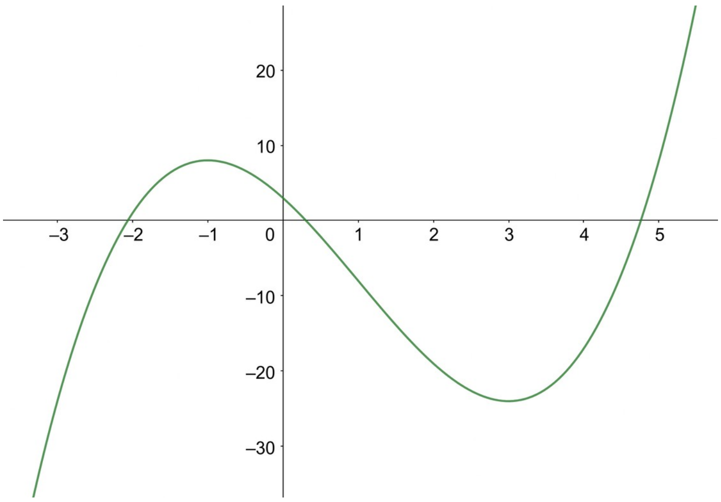
a. $y = 14x + 14$ b. $y = 14x - 14$ c. $y = 13x - 15$ d. $y = 13x - 12$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a. $y = -1$ b. $y = -x$ c. $y = -x + 1$ d. $y = x$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$. On appelle C sa courbe représentative.



1. Déterminer $f'(x)$.
2. a. Montrer que la tangente à la courbe C au point d'abscisse –1 est la droite D d'équation $y = 8$.

   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et en déduire que la courbe C admet une autre tangente horizontale dont on donnera l'équation.
3. a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

   b. Existe-t-il une autre tangente à la courbe C parallèle à celle définie dans la question 3.a. ?

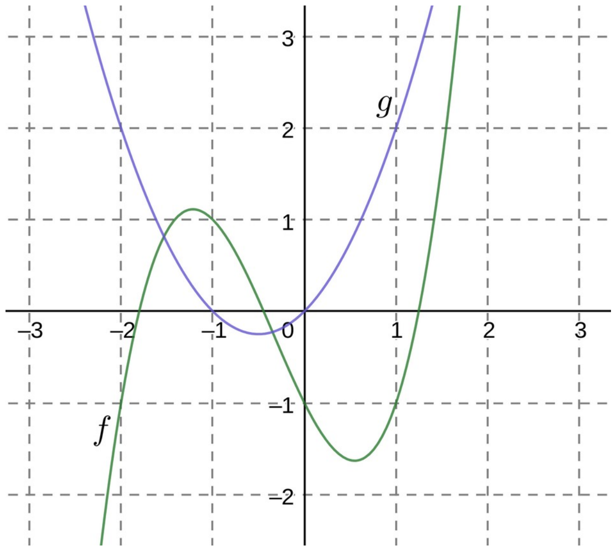
Exercice 3

Sur la figure, on a représenté les fonctions f et g définie sur IR par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$g(x) = x^2 + x$$

L'objectif est de trouver les abscisses des points tels que les tangentes à chacune des courbes soient parallèles entre elles.



1. Calculer les dérivées des fonctions f et g.
2. a. Montrer que les tangentes en – 1 à ces deux courbes sont parallèles.
   b. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les tracer sur le graphique.
3. a. Résoudre l'équation $f'(x) = g'(x)$.
   b. En déduire qu'il existe une autre valeur en laquelle les tangentes à chacune des courbes sont parallèles.
   c. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les tracer sur le graphique.

Exercice 4

Le coût de production, en euros, d'un volume noté v, exprimé en m³, d'un produit pharmaceutique, est donné par la fonction C définie sur [0 ; 25] par :

$$C(v) = 0{,}005\, v^3 - 2\, v^2 + 100\, v$$

En économie, le coût marginal au rang v est le coût supplémentaire, noté $C_m(v)$, pour fabriquer la dernière unité :

$$C_m(v) = C(v) - C(v-1)$$

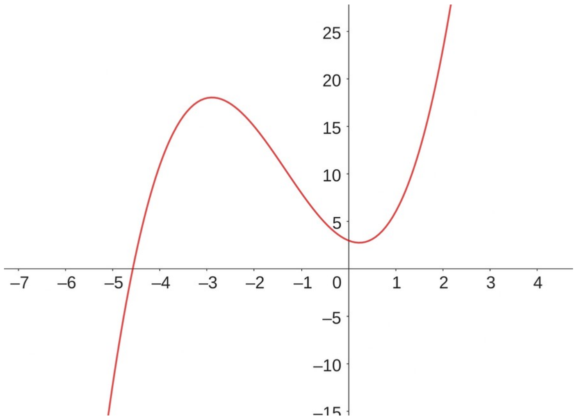
1. a. Calculer le coût de production de 19 m³ puis celui de 20 m³.
   b. En déduire le coût marginal $C_m(20)$ pour fabriquer le 20ᵉ m³.
2. Calculer la dérivée de la fonction C. En déduire $C'(20)$.
3. Les économistes considèrent que la dérivée du coût de production est une bonne approximation du coût marginal.
   a. Quel est, en %, l'erreur commise lorsque $v = 20$?
   b. En utilisant la dérivée du coût de production, donner une approximation du coût marginal pour un volume de 10 m³.

Dérivation : Variations et extremums

« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

Introduction.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$.



Étudier le signe de la fonction dérivée $f'(x)$: quel lien a-t-il entre le sens de variation de f et le signe de sa dérivée ?

Descartes et la géométrie analytique

Leibniz et Newton, le calcul infinitésimal

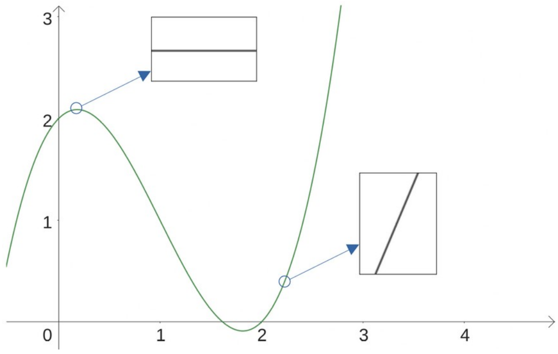
Flâneries infinitésimales (série Arte « Voyages au pays des maths »)

Le calcul infinitésimal : Newton et Leibniz

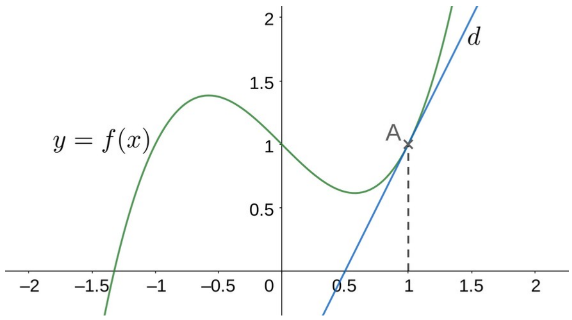
DÉRIVATION : VARIATIONS ET EXTREMUMS

« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

Dans un premier temps, nous sommes partis du constat qu'une courbe, au voisinage d'un point, est identique à une droite (à quelques exceptions près à notre niveau). La figure suivante l'illustre avec des agrandissements de deux voisinages de point.



La « pente d'une courbe » a pu alors être définie comme la pente (ou coefficient directeur) de cette droite : elle est calculée par la limite d'un taux de variations appelée « nombre dérivé ». Nous avons en parallèle défini cette droite comme étant la « tangente à la courbe ». La figure suivante illustre des deux points : la droite d est la tangente à la courbe en 1 et son coefficient directeur est $f'(1) = 2$.



Dans un second temps, nous avons dégagé des théorèmes généraux permettant de déterminer le nombre dérivé de toutes les fonctions connues en Première, nous affranchissant ainsi d'un calcul fastidieux de la limite du taux de variation.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

f	f'
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$k u$	$k u'$
$u v$	$u' v + u v'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u(ax + b)$	$a \times u'(ax + b)$

Voici venu un troisième temps, comme un point d'orgue, qui repose sur l'idée simple que **le signe de la « pente d'une courbe », c'est-à-dire de la dérivée, donne le sens de variation de la fonction** : si la « pente d'une courbe », la dérivée, est négative, la fonction est strictement décroissante, si elle est positive, la fonction est strictement croissante.

I. Lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée

Théorème. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Démonstration. La démonstration est hors programme car elle nécessite des théorèmes non enseigné au lycée.

L'idée principale à retenir est donc la suivante : le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction.

On rappelle qu'une fonction f est constante sur un intervalle I s'il existe un réel c tel que pour tout x de I, $f(x) = c$.

Les réciproques de ces implications sont vraies mais plus rarement utilisées.

Exemple 1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]-\infty\ ; 1{,}5\ [\ \cup\ ]\ 1{,}5\ ; +\infty\ [$ par $f(x) = \dfrac{x}{2x-3}$.

Solution. On calcule la dérivée de la fonction f : pour tout réel $x \neq 1{,}5$, $f'(x) = \dfrac{1\times(2x-3)-x\times 2}{(2x-3)^2} = -\dfrac{3}{(2x-3)^2}$.

On détermine son signe pour tout réel $x \neq 1{,}5$: $(2x-3)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$.

D'après le théorème, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ; 1{,}5\ [$ et sur l'intervalle $]\ 1{,}5\ ; +\infty\ [$.

II. Tableau de variations

Dans beaucoup d'exercice, un tableau de variations sera établi (voir l'exemple à droite).

C'est un condensé d'informations qui comporte habituellement :

- une ligne pour le signe de la dérivée
- une ligne pour les variations de la fonction
- des valeurs particulières de la fonction et de sa dérivée

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-7	↘	-10	↗	22	↘	15

Exemple 2. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 8$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

Solution. Pour tout réel x : $f'(x) = 2x + 4$.

$f'(x)$ est donc une fonction affine qui s'annule en -2.

De plus, $f(-2) = (-2)^2 + 4\times(-2) + 8 = 4$ et on peut alors dresser donc le tableau de variations suivant :

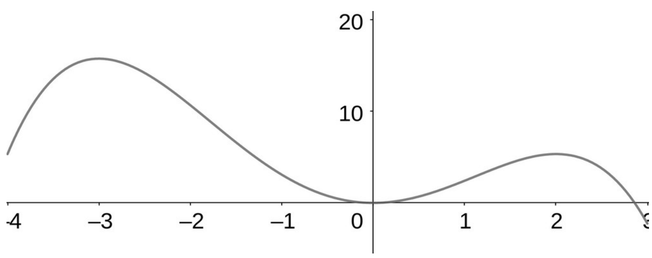
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	4	↗	

III. Extremum : nombre dérivé et tangente

Un extremum désigne un maximum ou un minimum. On peut distinguer entre extremum (maximum ou minimum de la fonction sur l'ensemble de définition) et extremum local (maximum ou minimum de la fonction sur un intervalle de l'ensemble de définition).

Par exemple, la fonction définie sur $[-4\ ; 3]$ et représentée ci-dessous admet deux maximum locaux : l'un en -3 environ valant environ 16 et l'autre en 2 environ valant environ 5.

Mais son maximum est environ 16 et il est atteint en -3 environ.

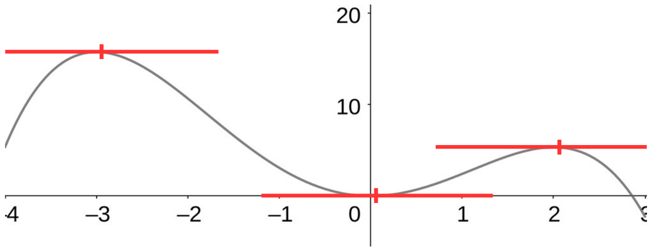


Théorème. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

La fonction f admet un extremum local en x_0 si et seulement si $f'(x)$ s'annule en x_0 en **changeant de signe**.

Démonstration. Admise pour l'instant.

La fonction f admet un extremum local, alors sa courbe représentative admet une tangente horizontale au point correspondant.



Un tableau de variations permet entre autres de déterminer les extremums d'une fonction car sa lecture permet d'appliquer directement le théorème précédent. Et à la différence d'une représentation graphique, le tableau donne des valeurs exactes.

Exemple 3. Soit la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous. Déterminer les extremums de f sur $[-2\ ;\ 4]$.

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-7	$\searrow$	-10	$\nearrow$	22	$\searrow$	15

Solution. D'après le tableau de variations, la fonction f admet un maximum égal à 22 obtenu lorsque $x = 3$ et un minimum égal à -10 obtenu lorsque $x = -1$.

Dérivation : Variations et extremums

« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

Exercice 1

$f_1(x) = x^2 - 3x + 7$ $\qquad$ $f_2(x) = -3x^2 + 6x - 5$ $\qquad$ $f_3(x) = -3x^2 + x + 2$

Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression donnée ci-dessus :

1. Calculer sa dérivée.
2. Dresser son tableau de variations.

Exercice 2

$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x + 1$ $\qquad$ $f_3(x) = x^3 - 0{,}0012x + 1$

Pour chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression donnée ci-dessus :

1. Calculer sa dérivée.
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x) = \dfrac{3-x}{x-4}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 4

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [–10 ; 10]. On donne le tableau de variation de la fonction f.

x	-10		-2		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 3.
2. Quels sont les extremums de la fonction f sur l'intervalle [–10 ; 10] ?

Exercice 5

Une entreprise produit entre 1 000 et 5 000 pièces par jour. Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour x milliers de pièces produites, est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1 ; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}5x^3 - 3x^2 + x + 16}{x}$$

1. Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.
2. La fonction f est dérivable sur [1 ; 5] et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel $x \in [1; 5]$:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 16}{x^2}$$

3. Vérifier que, pour tout réel x :

$$x^3 - 3x^2 - 16 = (x - 4)(x^2 + x + 4)$$

4. En déduire le tableau de variation de f sur [1 ; 5].
5. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal. Préciser ce coût minimal.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

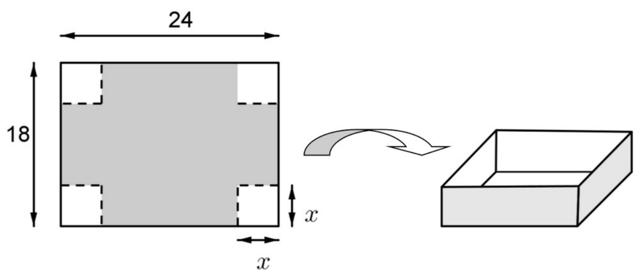
$$f(x) = x^3 + 7x^2 + 11x - 19$$

On note C sa courbe représentative.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 14x + 11 > 0$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
4. a. Justifier que 1 est solution de $x^3 + 7x^2 + 11x - 19 = 0$.
   b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = (x - 1)(x^2 + 8x + 19)$.
5. Étudier le signe de la fonction f et en dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.

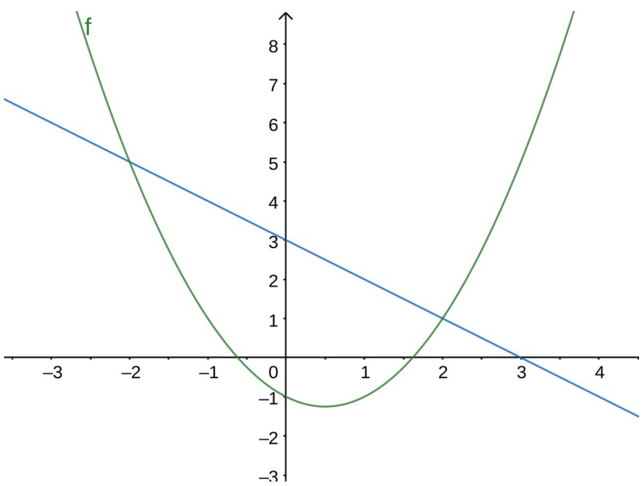


Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 9]$ notée $V(x)$.

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0 ; 9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.
2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0 ; 9]$. Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x.
3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?
5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 1$. On note C_f sa représentation graphique. On considère également la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 3 - x$. On note d sa représentation graphique.



1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Établir le tableau de variations complet de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2. Tracer cette droite ci-dessus.
4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ et en déduire les coordonnées des points d'intersections de C_f et d.
5. Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et d des fonctions f et g en fonction de x.