La fonction exponentielle

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Définition et propriétés algébriques

- Activités
- Cours
- Exercices

2. Signe, variation, courbe représentative

- ~~Activités~~
- Cours
- Exercices

FONCTION EXPONENTIELLE : DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUE

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Introduction. « Une brève histoire des maths » et « en fonction d'Euler ».

Deux vidéos supplémentaires pour les curieux : « Addition vs multiplication » et « Fractionnement de l'année pour le calcul des intérêts ».

Fonction exponentielle : Définition et propriétés algébrique

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

La fonction exponentielle, qui découle de la dérivation, est très importante en mathématiques et dans de nombreuses disciplines : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive...

I. Définition

Théorème. Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Démonstration. Nous ne pouvons pas au niveau du lycée prouver l'existence d'une telle fonction. On admettra donc qu'il en existe au moins une. Nous pouvons en revanche prouver son unicité.

D'abord, il est nécessaire de prouver qu'une telle fonction f ne s'annule jamais. Pour cela, on utilise la fonction g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$. La dérivée d'un produit et celle d'une fonction composée donnent alors :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que g est constante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = f(0) \times f(0) = 1$, on a ainsi prouvé que $f(x) \times f(-x) = 1$ pour tout réel x. On ne peut donc jamais avoir $f(x) = 0$ (car ça donnerait $0 = 1$: c'est pas beau, ça ?).

Ensuite, on suppose qu'une autre fonction, notée h part exemple, vérifie les mêmes conditions que f et on va prouver qu'elle est égale à f, ce qui prouvera l'unicité de f. Pour cela, on utilise la fonction $\dfrac{f(x)}{h(x)}$. Cette fonction est bien définie puisqu'on vient de montrer que son dénominateur ne s'annule jamais.

Sa dérivée donne :

$$\frac{f'(x)h(x)-f(x)h'(x)}{(h(x))^2} = \frac{f(x)h(x)-f(x)h(x)}{(h(x))^2} = 0$$

Donc le quotient $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ est constant sur $\mathbb{R}$ et puisque $\dfrac{f(0)}{h(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$, on a bien : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = 1$ soit $f(x) = h(x)$ pour tout réel x.

Définition. La fonction exponentielle est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et valant 1 en 0.

Pour tout réel x, l'exponentielle du réel x est notée $exp(x)$ et on a donc par définition :

$$exp'(x) = exp(x) \text{ et } exp(0) = 1$$

II. Propriétés algébriques

Théorème. Pour tous réels x et y :

$$exp(x + y) = exp(x) \times exp(y)$$

Démonstration. On va démontrer que, pour tous réels a et b, on a : $exp(a + b) = exp(a) \times exp(b)$

Pour cela, on introduit la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = exp(a + b - x) \times exp(x)$$

$u(x) = exp(a + b - x) = exp(-x + a + b)$ est de la forme $g(ax + b)$ donc sa dérivée est $u'(x) = -exp(a + b - x)$.

Maintenant, f étant un produit de fonctions dérivables, elle est dérivable et sa dérivée est :

$$f'(x) = -exp(a + b - x) \times exp(x) + exp(a + b - x) \times exp(x) = 0$$

On en déduit que f est une fonction constante et ainsi, en particulier : $f(0) = f(b)$.

Mais $f(0) = exp(a + b - 0) \times exp(0) = exp(a + b)$ et $f(b) = exp(a + b - b) \times exp(b) = exp(a) \times exp(b)$.

On vient de démontrer que pour tous réels a et b :

$$exp(a + b) = exp(a) \times exp(b)$$

Exemple 1. Soit x un nombre réel. Réduire l'expression $exp(x) \times exp(1-x)$.

Solution. $exp(x) \times exp(1-x) = exp(x + (1-x)) = exp(1)$

Définition. Le nombre e (appelé constante d'Euler) est l'image de 1 par la fonction exponentielle :

$$e = exp(1)$$

On peut maintenant observer que :

$exp(0) = 1 = e^0$ (un nombre élevé à la puissance 0 donne 1)

$exp(1) = e = e^1$

$exp(2) = exp(1+1) = exp(1) \times exp(1) = e \times e = e^2$

$exp(3) = exp(2+1) = exp(2) \times exp(1) = e^2 \times e = e^3$

Tout laisse donc à penser que, pour tout entier naturel n : $exp(n) = e^n$.

Théorème. Pour tout entier naturel n, l'exponentielle de n est égale au nombre d'Euler à la puissance n :

$$exp(n) = e^n$$

Démonstration. Cela nécessite d'utiliser un raisonnement par récurrence, au programme de terminale.

On décide alors d'introduire la notation suivante :

Notation. Pour tout réel x :

$$exp(x) = e^x$$

Ainsi le nombre noté e^3 peut être compris comme l'exponentielle de 3 (l'image de 3 par la fonction exponentielle : $exp(3)$) mais aussi comme une puissance, le cube du nombre e ($e^3 = e \times e \times e$) et ces deux interprétations sont cohérentes car on a prouvé $exp(3) = e^3$.
Le nombre noté $e^{2,3}$ ne peut être compris que comme l'exponentielle de 2,3 (l'image de 2.3 par la fonction exponentielle : $exp(2,3)$) mais il est absurde de l'interpréter comme une puissance car 2,3 n'est pas un nombre entier. C'est alors juste une notation mais elle va se révéler tellement commode qu'elle va éclipser la notation exp.

Théorème. Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^x \neq 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (e^x)^n = e^{n\times x}$$

Démonstration. La première égalité est la réécriture d'un théorème précédent avec la nouvelle notation.
La seconde a aussi été démontré dès le début de ce cours.

Comme $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ et comme $e^x \neq 0$, on obtient : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Comme $e^{x-y} \times e^y = e^{x-y+y} = e^x$ et comme $e^y \neq 0$, on obtient : $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

La dernière propriété est admise car le raisonnement par récurrence qui permet de la démontrer n'est abordé qu'en terminale.

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle sont donc cohérentes avec les propriétés des puissances (a est un réel, n et m sont des entiers relatifs) :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m}$$

Exemple 2. Soit x un nombre réel. Écrire les expressions suivantes sous la forme e^{ax+b} où a et b sont deux réels à déterminer.

$$a.\ e^{3x} \times e^{5-x} \qquad b.\ \frac{e^{2x-3}}{e^{x-1}} \qquad c.\ (e^{x+2})^2 \times (e^{-x+1})^3$$

Solution.

$a.$ $e^{3x} \times e^{5-x} = e^{3x+5-x} = e^{2x+5}$

$b.$ $\dfrac{e^{2x-3}}{e^{x-1}} = e^{2x-3-(x-1)} = e^{x-2}$

$c.$ $(e^{x+2})^2 \times (e^{-x+1})^3 = e^{2x+4} \times e^{-3x+3} = e^{2x+4-3x+3} = e^{-x+7}$

Fonction exponentielle : Définition et propriétés algébrique

« Il y a bien moins de difficulté à résoudre un problème qu'à le poser. » Joseph de Maistre

Exercice 1

Écrire les expressions suivantes sous la forme e^a où a est un réel à déterminer.

$$e^7 \times e^{-3} \qquad \frac{e^{13}}{e^2} \qquad \frac{e^6 \times e^3}{e^2} \qquad \frac{e^2}{(e^2)^3}$$

Exercice 2

Écrire les expressions suivantes sous la forme e^{ax+b} où a et b sont deux réels à déterminer.

$$e^{-x}\, e^2 \qquad \frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x} - 1 \qquad (e^x)^3 \times e^{-2x}$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} - 1 \qquad \frac{e^x\, e^{2x}}{e^{x+2}} \qquad \frac{\left(e^{-3x}\right)^2 e^{5x}}{e^{-x}} \qquad \frac{e^{2x+5}}{e^{3x} \times e^{-1}}$$

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout réel x :

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$$

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

Exercice 4

Trouver une valeur de x telle que : $\dfrac{e^{2x}}{e^x + 2} \neq \dfrac{2 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Exercice 5

1. Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

2. Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^{-x} + 1}{e^{-2x}} = e^x + e^{2x}$$

3. Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1$$

4. Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

FONCTION EXPONENTIELLE : SIGNE, VARIATION, COURBE REPRÉSENTATIVE

« La vérité sort plus facilement de l'erreur que de la confusion. » Francis Bacon

Dans la 1[re] partie, on a vu que, pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a :

$$exp'(x) = exp(x) \qquad exp(x) = e^x \qquad e^0 = 1 \qquad e^x \neq 0$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad (e^x)^n = e^{n \times x}$$

I. SIGNE

Théorème. Pour tout x réel, on a : $e^x > 0$.

Démonstration. Pour tout x réel, on a : $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$ et comme pour tout réel x, $e^x \neq 0$ (voir 1[re] partie), on a bien $e^x > 0$.

Il faut retenir qu'une exponentielle, quelque soit l'exposant, est toujours strictement positive.

Exemple 1. Donner le signe sur ℝ des expressions e^{2x}, e^{-3x}, $e^{\frac{1-x}{2}}$, $-e^{-3x-1}$ et $(10x-4)\,e^{-2x}$.

Solution. D'abord, pour tout réel x, on a directement $e^{2x} > 0$, $e^{-3x} > 0$ et $e^{\frac{1-x}{2}} > 0$.

Ensuite, pour tout réel x, $e^{-3x-1} > 0$ ce qui donne par conséquent $-e^{-3x-1} < 0$ sur ℝ.

Enfin, utilisons un tableau de signes pour la dernière expression :

x	$-\infty$		$0{,}4$		$+\infty$
$10x-4$		$-$	0	$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$(10x-4)\,e^{-2x}$		$-$	0	$+$	

II. VARIATION ET COURBE REPRÉSENTATIVE DE LA FONCTION EXP

Théorème. La fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

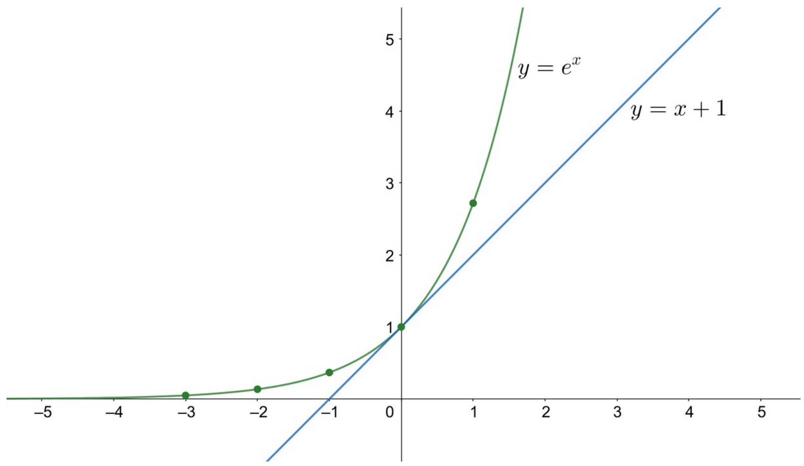
Démonstration. Pour tout réel x, $exp'(x) = exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$		$+\infty$
$exp'(x) = exp(x)$		$+$	
exp		$\nearrow$	

$e = exp(1) \approx 2{,}718\ldots$ (voir cette vidéo)

La méthode d'Euler en vidéo et sur Geogebra

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x (au centième)	0,05	0,14	0,37	1	2,72	7,39	20,09



Exemple 2. On donne $f(x) = (2x - 3)\, e^{x-3}$. Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée au centième de $f(5)$.

Solution. $f(5) = (2\times5 - 3)\, e^{5-3} = 7\, e^2 \approx 51{,}72$ d'après la calculatrice.

Attention, la calculatrice *TI-Collège Plus* n'intègre pas la fonction exponentielle. On peut s'en sortir un peu en tapant $7\times2{,}718^7 \approx 51{,}71$.

III. Application à l'étude de fonctions

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. Calculer la dérivée $f'(x)$ puis étudier son signe.

Solution. f est un quotient de fonctions dérivables sur ℝ et on a :

$$f'(x) = \frac{1\times e^x - x\times e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Étudions son signe à l'aide d'un tableau :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
e^x	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$

Théorème. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = e^{ax+b}$ où a et b sont deux réels.

La fonction f est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = a\, e^{ax+b}$$

Démonstration. Un théorème de dérivation donne la dérivée de la fonction composée définie sur un intervalle I par $f(x) = g(ax + b)$:

$$f'(x) = a\, g'(ax + b)$$

où g est la fonction exponentielle définie sur ℝ.

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x - 1)e^{2-x}$. Calculer la dérivée $f'(x)$ puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 1.

Solution. f est un produit de fonctions dérivables sur ℝ et on a :

$$f'(x) = 1e^{2-x} + (x - 1)(- e^{2-x}) = e^{2-x} - xe^{2-x} + e^{2-x} = (2 - x)\, e^{2-x}$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Or, $f'(1) = (2 - 1)\, e^{2-1} = e$ et $f(1) = 0$. On obtient ainsi l'équation :

$$y = e(x - 1) + 0$$

$$y = ex - e$$

Fonction exponentielle : Signe, variation, courbe représentative

« La vérité sort plus facilement de l'erreur que de la confusion. » Francis Bacon

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Alors la fonction dérivée de f, notée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = e^x$ b. $f'(x) = (x+1)e^x$ c. $f'(x) = e$ d. $f'(x) = x^2 e^x$

2. On considère la fonction f dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{2x}$. La fonction dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = (x+2)e^x$ b. $f'(x) = (-2x-1)e^{2x}$ c. $f'(x) = xe^{2x}$ d. $f'(x) = (2x+3)e^{2x}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7x-23)(e^x+1)$. L'équation $f(x) = 0$:

a. admet $x = 1$ comme solution b. admet deux solution sur $\mathbb{R}$

c. admet $x = \dfrac{23}{7}$ comme solution d. admet $x = 0$ comme solution

4. La fonction f est définie pour tout x réel par $f(x) = 3e^{2x} - e^x$. La fonction dérivée de f est définie pour tout x réel par :

a. $f'(x) = e^x(3e^x)$ b. $f'(x) = 6e^{2x} - e^x$ c. $f'(x) = 3e^{2x} - e^x$ d. $f'(x) = 3(e^x)^2 - 1$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x-1)e^{2x}$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4\,x\,e^{2x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Dans les questions suivantes, on note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

4. Donner sans justification les coordonnées du point d'intersection de C avec l'axe des ordonnées.

5. Déterminer une équation de la tangente T *à* C au point d'abscisse 1.

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5; 5]$ par :

$$g(x) = e^x - x + 1$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $[-5; 5]$ et on note g' sa fonction dérivée.

Calculer $g'(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[-5; 5]$.

3. Démontrer que g est strictement positive sur $[-5; 5]$, c'est-à-dire que :

$$\text{pour tout } x \in [-5; 5],\ g(x) > 0.$$

Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[-5; 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

4. Démontrer que pour tout réel x de $[-5; 5]$,

$$f'(x) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$$

En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5; 5]$.

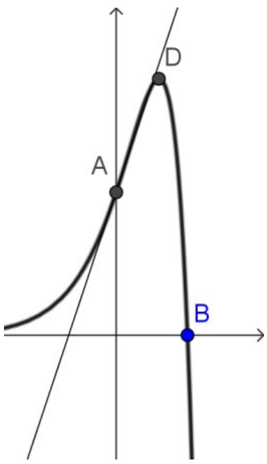
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5 - 2x)e^x$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f. Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal où les unités ont été effacées.



A est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

D est le point de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B.

2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (3 - 2x)e^x$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction f.

4. En déduire que le point D admet comme coordonnées $(1{,}5 ; 2e^{1{,}5})$.

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, puis vérifier, à l'aide de l'équation obtenue, que le point D n'appartient pas à cette tangente.