Fonctions trigonométriques

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. Radian, sinus et cosinus

- Activités
- Cours
- Exercices

2. Fonctions trigonométriques

- Activités
- Cours
- Exercices

Fonctions trigonométriques : Radian, sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

Activité. Dans un repère orthonormé d'origine O, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. On note A le point de coordonnées (1 ; 0).

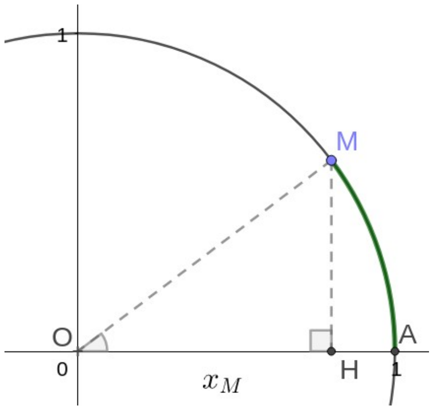
1. Expliquer pourquoi la longueur d'un quart du cercle trigonométrique est $\frac{\pi}{2}$.

2. Découvrir l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique en vidéo (jusqu'à 2'26") et en animation.

3. Repérer sur le cercle trigonométrique quelques angles remarquables : compléter le tableau suivant.

Angle en degré	0°	30°		60°		120°	180°
Un réel associé	0		$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$		$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$		π

4. Soit M un point du cercle trigonométrique tel que l'angle $\widehat{AOM}$ est aigu.
On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses : $x_M = OH$.



Montrer que : $x_M = \cos\left(\widehat{AOM}\right)$ puis que $y_M = \sin\left(\widehat{AOM}\right)$.

L'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique

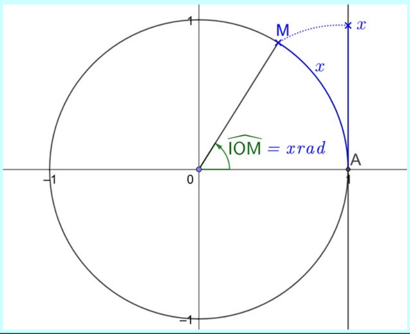
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES : RADIAN, SINUS ET COSINUS

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

I. Le radian

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle de centre O et de rayon 1 (appelé cercle trigonométrique) et la droite d'équation $x = 1$. En « enroulant » cette droite graduée à partir du point A (1;0) sur le cercle trigonométrique, on constate qu'à tout réel x est associé un seul point du cercle trigonométrique et qu'à tout point du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels.

Définition. On appelle mesure en radian de l'angle $\widehat{AOM}$ le nombre réel x associé au point M.



Lorsque $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOM}$ correspond donc à la longueur de l'arc AM.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. Il donne les mesures les plus utilisées.

Mesure en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Réel associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Exemple 1. Sans calculatrice, déterminer un réel associé à un angle de 20° en radian et l'angle en degré correspondant au réel $\frac{5\pi}{12}$.

Méthode : pour convertir des mesures d'angles, on peut utiliser leur proportionnalité.

Exemple 2. Marquer le point correspondant à $\frac{5\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

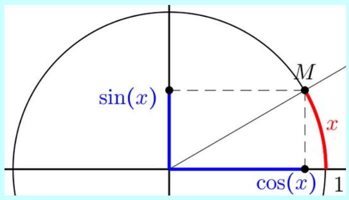
Méthode : pour placer un point sur le cercle trigonométrique, on peut utiliser un partage du cercle trigonométrique.

II. Le cosinus et le sinus d'un réel

Définitions. Soient x un réel et $M(x_M\,;y_M)$ le point du cercle trigonométrique associé à x.

On appelle cosinus de x l'abscisse de M et sinus de x l'ordonnée de M.

$$\cos(x) = x_M \text{ et } \sin(x) = y_M$$



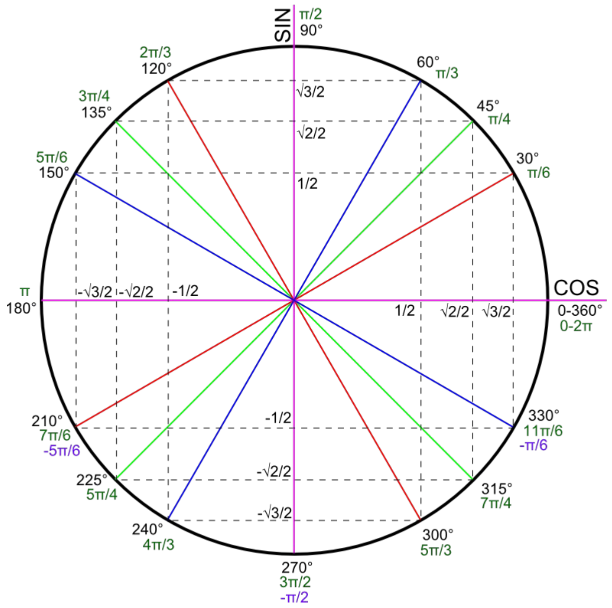
Lorsque $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (angle aigu), cette définition correspond alors à celle du cosinus dans un triangle rectangle.

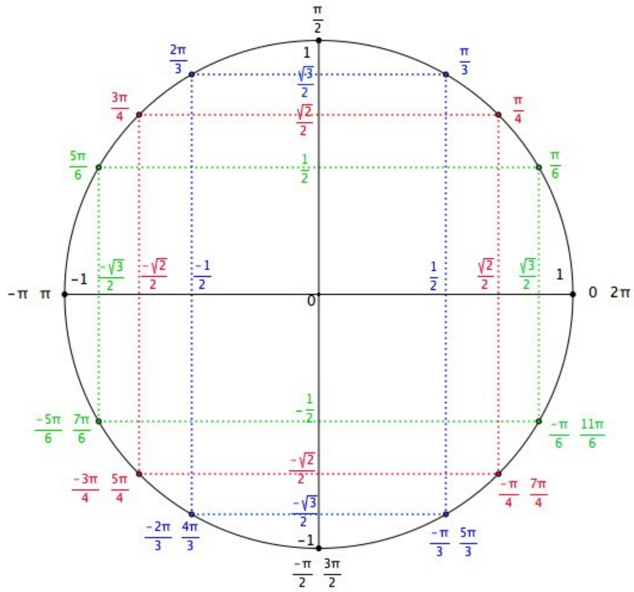
Quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus doivent être connues.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstrations. En exercice.

Cercles trigonométriques avec valeurs remarquables





Exemple 3. Sans la calculatrice, donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Méthode : pour déterminer le sinus ou le cosinus d'un réel, on peut lire le cercle trigonométrique.

Exemple 4. Sans la calculatrice, déterminer le réel $a \in [-\pi\ ;\ \pi]$ tel que $\sin(a) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(a) = \dfrac{1}{2}$.

Méthode : pour déterminer un réel connaissant son sinus ou son cosinus, on peut lire le cercle trigonométrique.

Exemple 5. Avec la calculatrice, donner une valeur approchée de $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Méthode : pour déterminer le sinus ou le cosinus d'un réel, on peut utiliser la calculatrice.

Exemple 6. Avec la calculatrice, donner une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ tel que $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = -0{,}3$.

Méthode : pour déterminer des sinus et cosinus, on peut utiliser la calculatrice.

Fonctions trigonométriques : Radian, sinus et cosinus

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur » Gert Martin Greuel

Capacités attendues

Les questions sont indépendantes. Pour les questions 1 à 4, l'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

1. Déterminer un réel associé à un angle de 70° en radian et trouver l'angle en degré correspondant à $\frac{10\pi}{9}$.

2. Marquer le point correspondant à $\frac{7\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.

3. Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

4. Déterminer le réel $a \in [0\,;2\pi]$ tel que $\sin(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(a) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

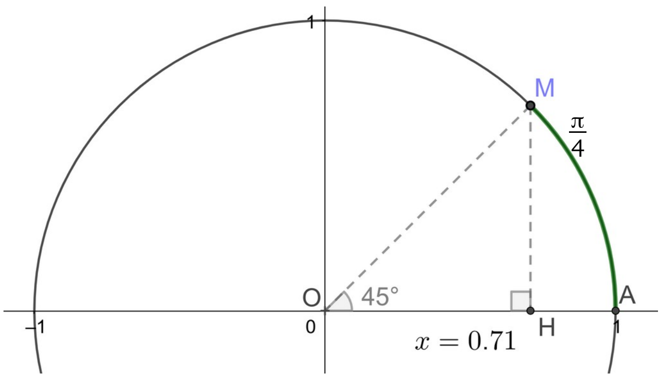
5. Utiliser la calculatrice pour trouver une valeur approchée de $\cos(105°)$.

6. Utiliser la calculatrice pour trouver une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{AOC}$ tel que $\cos\left(\widehat{AOC}\right) = \frac{13}{18}$.

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de terminer la démonstration de :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



D'abord, par définition, $\sin\frac{\pi}{4} = y_M = HM$.

Ensuite, il apparaît que, dans ce cas, le triangle OHM est rectangle et isocèle en H.

On a donc, d'après le théorème de Pythagore : $HM^2 + OH^2 = OM^2 = 1$.

De plus : HM = OH.

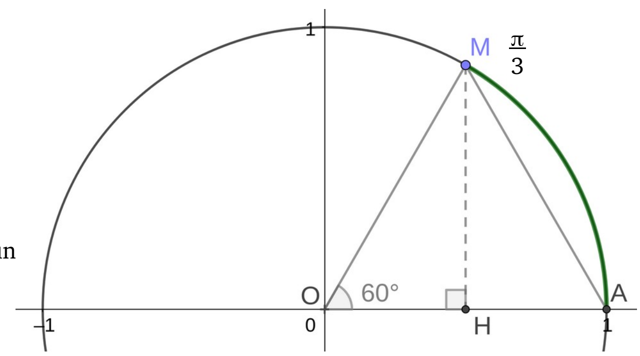
1. En déduire la longueur HM.

2. Montrer enfin que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de compléter les démonstrations de :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



D'abord, par définition, $\sin\frac{\pi}{3} = y_M = HM$ et $\cos\frac{\pi}{3} = x_M = OH$.

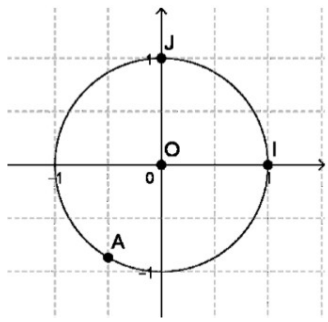
Ensuite, il apparaît que, dans ce cas, le triangle OMA est isocèle et possède un angle de 60° : il est donc équilatéral. On en déduit que la hauteur (HM) est également la médiatrice de [OA].

1. En déduire la longueur OH.

2. Montrer maintenant, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H, que $HM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3

Dans un repère orthonormal, le point A, placé ci-contre sur le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I, est associé au nombre réel :



a) $\dfrac{11\pi}{6}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $-\dfrac{2\pi}{3}$ d) $-\dfrac{3\pi}{4}$

Exercice 4

Le nombre réel $\dfrac{13\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

a) $\dfrac{-14\pi}{4}$ b) $\dfrac{-3\pi}{4}$ c) $\dfrac{7\pi}{4}$ d) $\dfrac{19\pi}{4}$

Exercice 5

Les solutions dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ de l'équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont :

a) $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ d) $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 6

Pour tout réel x, on a $\sin(\pi + x) =$

a) $-\sin(x)$ b) $\cos(x)$ c) $\sin(x)$ d) $-\cos(x)$

Exercice 7

Soit x un nombre réel. Le réel $\cos(x + 3\pi)$ est égal à :

a) $\cos(x)$ b) $-\cos(x)$ c) $\sin(x)$ d) $-\sin(x)$

Exercice 8

Soit x un nombre réel. On peut affirmer que :

a) $\cos(x) = \sin(x)$ b) $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

c) $\sin(\pi - x) = \sin(\pi + x)$ d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

Exercice 9

Pour tout réel x, $\cos(25\pi + x)$ est égal à :

a) $\cos(x)$ b) $-\cos(x)$ c) $\cos(-x)$ d) -1