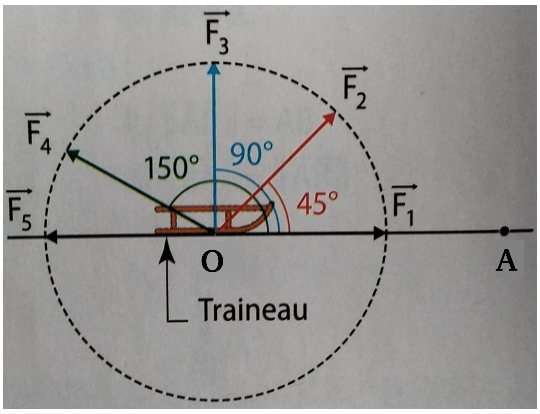
CALCUL VECTORIEL ET PRODUIT SCALAIRE

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

Calcul vectoriel et produit scalaire : un nouvel outil

« Apprenez oui, mais apprenez surtout à vivre. »

Un traîneau se déplace sur une trajectoire rectiligne de O à A. On exerce tour à tour une des 5 forces $\vec{F_1}$ à $\vec{F_5}$ sur le traîneau et on s'intéresse à son influence sur le déplacement. Chaque force à la même intensité mais une direction et un sens différents.



1. Classer ces forces en trois catégories selon leur influence sur le mouvement : les négatives qui s'opposent au mouvement, les positives qui accélèrent le mouvement et les neutres qui n'ont pas d'influence sur le mouvement.
2. Inventer un indicateur (c'est très à la mode en ce moment), c'est-à-dire attribuer une valeur numérique à chaque force en fonction de son influence sur le mouvement et déterminer une méthode de calcul associée.

Le travail d'une force et le produit scalaire

Calcul vectoriel et produit scalaire : un nouvel outil

« Apprenez oui, mais apprenez surtout à vivre. »

I. Deux expressions du produit scalaire

A. Par projection orthogonale

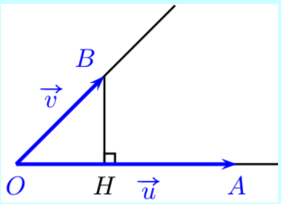
Rappel : Le projeté orthogonal d'un point B sur une droite (OA) est le point H de la droite (OA) tel que (BH)⊥(OA).

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

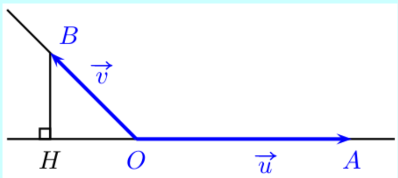
Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$, est un nombre réel défini ainsi :

Si l'un des deux vecteurs est nul, alors $\vec{u}.\vec{v}=0$;

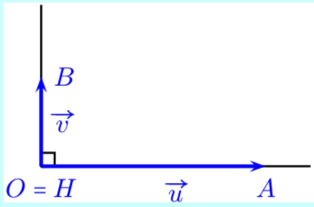
Si aucun des deux vecteurs n'est nul, alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA) :



$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OH}$



$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = -\,\mathrm{OA}\times\mathrm{OH}$



$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = 0$

Cas particulier : si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, alors le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OA}$ peut être noté $\overrightarrow{OA}^{\,2}$. On l'appelle carré scalaire de $\overrightarrow{OA}$ et il est égal à OA^2.

Définition. Le carré scalaire de $\overrightarrow{OA}$ est : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^{\,2} = \mathrm{OA}^2$. Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

Rappel : La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est sa longueur. Elle est notée $\|\vec{u}\|$.

Exemple 1. On considère un carré ABCD de côté 3 et E le milieu de [AB]. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

Méthode : pour calculer un produit scalaire par projection orthogonale de deux vecteurs de même origine,

on peut commencer par déterminer le projeté orthogonal de l'extrémité d'un des deux vecteurs sur la droite dirigée par l'autre.

B. À l'aide des normes et d'un angle

Théorème. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B trois points.

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

Démonstration. À partir du projeté orthogonal en distinguant les trois cas.

Exemple 2. ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

Méthode : pour calculer un produit scalaire connaissant les normes et l'angle de deux vecteurs de même origine,

on peut appliquer directement le théorème.

II. Caractérisation de l'orthogonalité

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux s'ils forment un angle droit.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

III. Propriétés du produit scalaire

A. Symétrie

Théorème. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

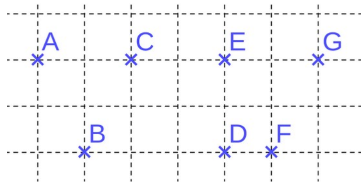
$$\vec{v}\,.\,\vec{u} = \vec{u}\,.\,\vec{v}$$

Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et trois points O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. D'après l'expression du produit scalaire à l'aide des normes et d'un angle, on a :

$$\vec{v}\,.\,\vec{u} \;=\; \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA} \;=\text{OB}\times\text{OA}\times\cos\left(\widehat{\text{BOA}}\right) \;=\text{OA}\times\text{OB}\times\cos\left(\widehat{\text{AOB}}\right) \;=\; \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} \;=\; \vec{u}\,.\,\vec{v}$$

Exemple 3. L'unité de longueur est le côté d'un carreau du quadrillage.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AE}$.



B. Bilinéarité

Théorème : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan, et a un réel.

$$\vec{u}\,.(\,\vec{v}+\vec{w}\,) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$$

$$(a\times\vec{u}\,).\,\vec{v} = \vec{u}\,.(a\times\vec{v}\,) = a\times(\,\vec{u}\,.\,\vec{v}\,)$$

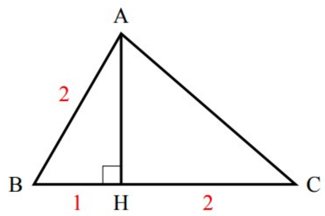
Démonstration. Admise.

Ces propriétés de symétrie et de bilinéarité permettent de prouver la « double distributivité » du produit scalaire sur l'addition des vecteurs et les « identités remarquables » correspondantes :

Théorème : $(\,\vec{u}+\vec{v}\,).(\,\vec{w}+\vec{z}\,) = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{u}\,.\,\vec{z} + \vec{v}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{z}$

$(\,\vec{u}+\vec{v}\,)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$ $\quad(\,\vec{u}-\vec{v}\,)^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2}$ $\quad(\,\vec{u}+\vec{v}\,)(\,\vec{u}-\vec{v}\,) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

Exemple 4. Calculer le carré scalaire $(\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\,)^2$.



C. Développement d'un carré scalaire

Théorème : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^{\,2} = \|\vec{u}\|^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^{\,2} \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\|^{\,2} = \|\vec{u}\|^{\,2} - 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^{\,2}$$

Rappel : $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^{2}$.

Démonstration. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^{\,2} = (\,\vec{u}+\vec{v}\,)^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^{\,2} + 2\times\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^{\,2}$ (Idem pour la 2e égalité)

Calcul vectoriel et produit scalaire : Un nouvel outil

« Apprenez oui, mais apprenez surtout à vivre. »

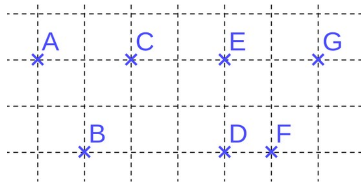
Capacités attendues

Les questions sont indépendantes et ne suivent pas forcément l'ordre des exemples du cours.

1. L'unité de longueur est le côté d'un carreau du quadrillage.

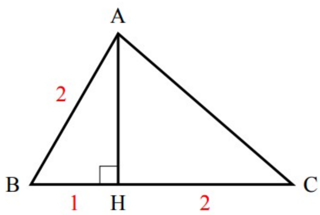
Calculer les produits scalaires suivants par projection orthogonale :

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE}$ $\quad$ $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$ $\quad$ $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GB}$ $\quad$ $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{FE}$ $\quad$ $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC}$



2. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = \sqrt{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. Développer et réduire le produit scalaire $(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$ et en déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



4. ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $\widehat{BAD} = 60°$. Démontrer que $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$.

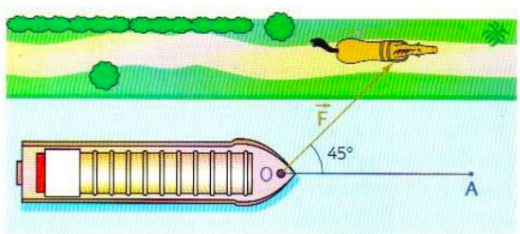
Exercice 1

Le travail W (en J) d'une force $\vec{F}$ (en N) appliqué à un solide se déplaçant d'un point O à un point A (en m) est :

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OA}$$

C'est un indicateur de l'action d'une force sur le déplacement d'un objet : si $W = 0$, la force appliquée n'a pas d'incidence sur le déplacement ; si $W < 0$, la force appliquée s'oppose au déplacement ; si $W > 0$, la force contribue au déplacement.

Pour tirer sur 50 m de O à A une péniche, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force $\vec{F}$ d'une intensité de 2 000 N selon un angle constant de 45° par rapport au déplacement.



Les résultats seront arrondis à l'unité.

1. Calculer le travail W de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement.

Les questions suivantes sont indépendantes et, sauf indication contraire, la distance, l'intensité et l'angle sont ceux de l'énoncé.

2. Si la péniche était tirée selon un angle de 30°, quel serait le travail W de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement ?
3. Si la péniche était tirée sur 100 m, quel serait le travail W de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement ?
4. Si la péniche était tirée selon un angle de 60°, quelle serait l'intensité de la force qu'il faudrait exercer pour obtenir le même travail que celui calculé à la question 1 ?
5. Si la péniche était tirée dans son axe par un remorqueur, quelle serait l'intensité de la force qu'il faudrait exercer pour obtenir le même travail que celui calculé à la question 1 ?