PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET ARBRES PONDÉRÉS

2. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

« Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. » Alexandre Grothendieck

Activité. Dans le cycle terminal d'un lycée, il y a 288 élèves répartis ainsi :

	Première	Terminale	Total
Filles	73	72	145
Garçons	78	65	143
Total	151	137	288

On choisit un élève au hasard.

On note F : « L'élève choisi est une fille » et T : « L'élève choisi est un élève de terminale ».

La probabilité que cet élève soit un élève de terminale est $\frac{137}{288} \approx 0{,}476\ldots$ et la probabilité que cet élève soit une fille est $\frac{145}{288} \approx 0{,}503\ldots$

$$p(\mathrm{T}) = \frac{137}{288} \approx 0{,}476 \text{ et } p(\mathrm{F}) = \frac{145}{288} \approx 0{,}503 \text{ (arrondis au millième)}$$

1. a. Si on choisit cet élève parmi les filles uniquement, qu'elle est la probabilité qu'il soit un élève de terminale ? On la notera $\boldsymbol{p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})}$.

   b. Si on choisit cet élève parmi les élèves de terminale uniquement, qu'elle est la probabilité qu'il soit une fille ? On la notera $\boldsymbol{p_{\mathrm{T}}(\mathrm{F})}$.

2. a. Quelle est la probabilité que cet élève soit une fille de terminale ? On la notera $\boldsymbol{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})}$.

   b. Trouver une relation entre $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})$, $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})$ et $p(\mathrm{F})$.

3. Calculer $p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{T}})$ et déterminer une relation entre $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})$ et $p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{T}})$.

4. Proposer au moins un arbre représentant cette situation et sur lequel figurera quelques probabilités obtenues.

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

« Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. » Alexandre Grothendieck

I. Définition

Définition. Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est notée $p_A(B)$ et est donnée par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

On dira en abrégé « p de B sachant A » pour $p_A(B)$.

On en déduit immédiatement que :

Théorème. Soient A et B deux événements.

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Démonstration. On multiplie chaque membre de l'égalité de la définition par $p(A)$, ce qui est légitime car $p(A) \neq 0$.

J'ajoute une remarque essentielle : $p_A(B)$ est une probabilité donc $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$ (si vous obtenez un jour une probabilité conditionnelle qui n'est pas dans cet intervalle, c'est forcément une erreur).

Pour la suite, je vous propose de travailler avec un énoncé unique pour tous les exemples de ce cours.
Si vous avez le temps et un peu de curiosité, vous pouvez regarder une vidéo sur les tests de dépistage par Manu Houdart.

Maintenant, voici l'**énoncé commun aux différents exemples** de ce cours : dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus. La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (pour les futurs soignants, on appelle cette probabilité la sensibilité du test). La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (cette probabilité étant appelée spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

Exemple 1. Quelle est la valeur de $p_V(T)$?

Méthode : pour déterminer une probabilité conditionnelle, on peut interpréter l'énoncé.

Exemple 2. Calculer la probabilité de l'événement $V \cap T$ et interpréter celle-ci.

Méthode : pour calculer la probabilité d'une intersection de deux événements,
on peut utiliser les probabilités conditionnelles.

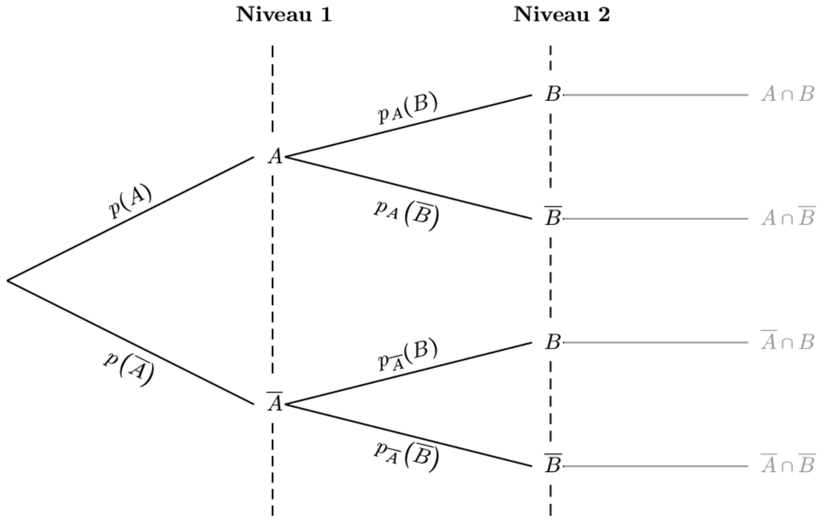
On peut donc déterminer des probabilités par la lecture de l'énoncé (exemple 1) ou par un calcul direct (exemple 2).

Grâce aux arbres pondérés, on va pouvoir représenter de façon condensée et très pratique cette situation : cette représentation va se révéler très efficace dans la résolution de problèmes de probabilités, comme lorsque l'on va chercher à connaître la probabilité d'avoir un faux-positif (un faux-positif est une personne ayant un test positif mais qui n'est pas contaminée).

II. Arbres pondérés

Un arbre pondéré permet de modéliser certaines expériences aléatoires.

Arbre pondéré à deux niveaux et deux branches à chaque nœud



Règle de la somme : $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$

Règle du produit : $p(A) \times p_A(B) = p(A \cap B)$

Règle de la somme. La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Démonstration. Distinguons les niveaux 1 et 2.

Pour tout évènement A d'un univers Ω et $\bar{A}$ son évènement contraire, on a, d'après un théorème de seconde :

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

ce qui prouve la règle au niveau 1.

Maintenant, pour le niveau 2, il s'agit de montrer par exemple que $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$.

L'idée est de considérer l'évènement A comme étant l'union de $A \cap B$ et de $A \cap \bar{B}$ (toute issue de A est soit dans B soit dans son contraire $\bar{B}$). On obtient :

$$\begin{aligned} p(A) &= p\left((A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})\right) \\ &= p(A\cap B) + p(A\cap\bar{B}) - p\left((A\cap B)\cap(A\cap\bar{B})\right) \qquad \text{(d'après un autre théorème de seconde)} \\ &= p(A\cap B) + p(A\cap\bar{B}) \end{aligned}$$

En effet, $A\cap B$ et $A\cap\bar{B}$ étant incompatibles (une issue ne peut être à la fois dans A, dans B et dans $\bar{B}$), $p\left((A\cap B)\cap(A\cap\bar{B})\right) = 0$.

On a ainsi :

$$p(A) = p(A\cap B) + p(A\cap\bar{B})$$

ce qui donne, puisque $p(A) \neq 0$,

$$1 = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} + \frac{p(A\cap\bar{B})}{p(A)}$$

et enfin, par définition :

$$p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$$

La démonstration est similaire pour les autres branches du niveau 2.

Exemple 3. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

Méthode : pour construire un arbre de probabilités, on choisit l'ordre des nœuds en fonction des données de l'énoncé.

Une succession de plusieurs branches reliées par des nœuds s'appelle un chemin. L'arbre ci-dessus possède quatre chemins.

Règle du produit. La probabilité de l'intersection des événements rencontrés le long d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

Démonstration. En suivant le chemin en haut de l'arbre, on rencontre les événements A et B et le théorème donne directement :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$$

La démonstration est similaire pour chaque chemin.

Exemple 4. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{T}$.

Méthode : pour calculer la probabilité d'une intersection de deux événements,
on peut s'aider d'un arbre de probabilité et appliquer les règles de calculs.

Exemple 5. On admet que la probabilité que le test soit positif est $0,0492$. Un faux-positif est une personne ayant un test positif mais qui n'est pas contaminée. Déterminer la probabilité $p_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{V}})$ d'avoir un faux-positif. Arrondir à 10^{-4}.

Méthode : pour calculer une probabilité conditionnelle n'apparaissant pas sur l'arbre de probabilités,
on peut utiliser la définition.

Avec ce dernier exemple, la boucle est bouclée : la probabilité recherchée n'apparaît pas sur l'arbre (elle appartient à l'arbre inverse, celui dont le niveau 1 est constitué de B et de $\overline{\mathrm{B}}$) et il faut revenir à la définition de départ pour l'obtenir.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET ARBRES PONDÉRÉS (RÉSUMÉ)

« Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. » Alexandre Grothendieck

I. DÉFINITION

Définition. Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant l'événement A est notée $p_A(B)$ et est donnée par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

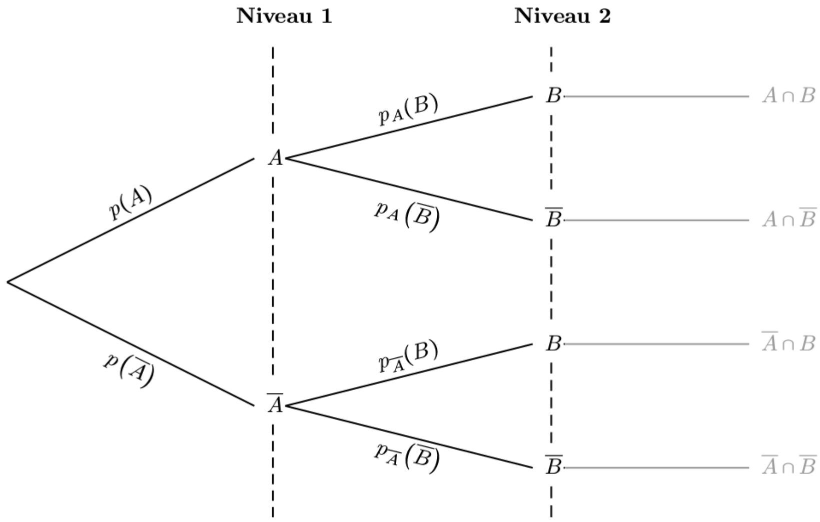
On a donc : $\boxed{p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)}$. Rappels : $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$ et $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$.

Exemple 1. Dans un pays, il y a 2% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus. La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99. La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97. On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ». Préciser la valeur de $p_V(T)$.
Exemple 2. (l'énoncé est à chaque fois celui de l'exemple 1) Calculer la probabilité de l'événement $V \cap T$ et interpréter celle-ci.

II. ARBRES PONDÉRÉS

Un arbre pondéré permet de modéliser certaines expériences aléatoires.

Arbre pondéré à deux niveaux et deux branches à chaque nœud



Règles de la somme et du produit : $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$ et $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

Règle de la somme. La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Avec les branches partant du nœud « A », on obtient : $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$.

Exemple 3. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

Une succession de plusieurs branches s'appelle un chemin.

Règle du produit. La probabilité de l'intersection des événements rencontrés le long d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

En suivant le chemin en haut de l'arbre, on rencontre les événements A et B et on obtient donc : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.
Exemple 4. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{V} \cap T$.
Exemple 5. On admet que la probabilité que le test soit positif est 0, 0492. Un faux-positif est une personne ayant un test positif mais qui n'est pas contaminée. Déterminer la probabilité $p_T(\overline{V})$ d'avoir un faux-positif. Arrondir à 10^{-4}.

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

« Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. » Alexandre Grothendieck

Exercice 1

Claire joue régulièrement à un jeu de simulation de tournois de judo en ligne. Les adversaires qu'elle combat sont générés automatiquement de manière aléatoire. Les scores relevés par le jeu montrent qu'elle gagne dans 45% des cas si son adversaire est ceinture noire et dans 70% si son adversaire n'est pas ceinture noire.

Claire commence un tournoi et un premier adversaire est généré par le jeu. La probabilité que cet adversaire soit ceinture noire est 60 %.

On note N l'événement : « l'adversaire est ceinture noire » et G l'événement : « Claire gagne le combat ».

1. Donner $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{G})$ et $p(\mathrm{N})$.
2. Tracer un arbre pondéré modélisant cette situation.
3. Calculer $p(\mathrm{N} \cap \mathrm{G})$. Interpréter ce résultat.
4. On admet que la probabilité que Claire gagne est $p(\mathrm{G}) = 55$ %. Sachant que Claire vient de gagner son combat, quelle est la probabilité que le combat ait été contre une ceinture noire ? *Donner le résultat sous la forme d'un pourcentage arrondi à* 0,1 %.

Exercice 2

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A en a produit $\frac{3}{5}$ et B en a produit $\frac{2}{5}$.

L'atelier A produit 4 % de puces défectueuses et B en produit 5 %. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la composition de la commande (en effectifs) :

	D	$\overline{\mathrm{D}}$	Total
A			
B			
Total			2 000

2. En utilisant le tableau :
   a. Calculer $p(\mathrm{D})$ et $p(\overline{\mathrm{D}})$.
   b. La puce prise au hasard n'est pas défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier A.
   c. Déterminer $p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{D}})$ et interpréter le résultat.
3. Modéliser la situation par deux arbres de probabilités différents.
4. En utilisant ces deux arbres, calculer de deux façons différentes $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D})$.

Exercice 3

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6% sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note D l'événement « le lecteur MP3 est défectueux » et R l'événement « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

Les probabilités seront donnés sous forme décimale en arrondissant si besoin à 10^{-4}.

1. Quelle est la probabilité que le lecteur soit rejeté sachant qu'il est défectueux.
2. Faire un arbre pondéré modélisant cette situation.
3. Que représente l'événement $\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{R}$? Quelle est la probabilité de cet événement ?
4. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
5. On admet que la probabilité qu'un lecteur MP3 soit rejeté est égale à 0,1058. Calculer la probabilité que le lecteur MP3 soit défectueux sachant qu'il est rejeté.

Exercice 4

Un gérant d'un salon de thé achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur « Au thé de qualité » et 20 % de ses boîtes chez le fournisseur « Bon thé ».
Des contrôles de qualité montrent que 10 % des boîtes provenant du fournisseur « Au thé de qualité » présentent des traces de pesticides et que 20 % de celles provenant du fournisseur « Bon thé » présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du gérant et on considère les événements suivants :

- A : « la boîte provient du fournisseur « Au thé de qualité » » ;
- B : « la boîte provient du fournisseur « Bon thé » » ;
- T : « la boîte présente des traces de pesticides ».

Les résultats seront donnés en pourcentage.

1. Donner la probabilité que la boîte présentent des traces de pesticides sachant qu'elle provient du fournisseur « Bon thé ».
2. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité que la boîte prélevée provienne du fournisseur « Au thé de qualité » et contienne des traces de pesticide ?
4. Que représente l'événement $B \cap \overline{T}$? Quelle est la probabilité de cet événement ?
5. On admet que la probabilité que la boîte ne présente aucune trace de pesticides est égale à 88 %. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur « Bon thé » ? Arrondir à 0,1 %.

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

« De temps en temps, s'arrêter et s'asseoir. Pendant quelques minutes, ne rien faire, juste être. »

Activité. Une urne contient 2 boules noires et 8 blanches et donc 10 boules au total. On tire deux boules de cette urne. On note A l'événement « la première boule tirée est noire » et B l'événement « la deuxième boule tirée est noire ».

1. Dans cette partie, le tirage de ces deux boules s'effectue **successivement avec remise** de la boule tirée dans l'urne.
   a. Donner $p(\mathrm{B})$.
   b. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   c. Calculer $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$ et exprimer $p(\mathrm{B})$ en fonction de $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$.
   d. Comparer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{B})$. La réalisation de l'événement A influence-t-elle celle de l'événement B ?

2. Dans cette partie, le tirage des deux boules s'effectue **successivement sans remise** de la boule dans l'urne.
   a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b. En admettant que le lien entre $p(\mathrm{B})$, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$ établi à la question 1c reste vrai dans cette situation, calculer $p(\mathrm{B})$.
   c. Comparer $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{B})$. La réalisation de l'événement A influence-t-elle celle de l'événement B ?

Les tests de dépistage

Formule des probabilités totales et indépendance

« De temps en temps, s'arrêter et s'asseoir. Pendant quelques minutes, ne rien faire, juste être. »

I. Formule des probabilités totales

En probabilité, l'univers est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Définition. Une partition d'un univers ou système complet d'événements est un ensemble d'événements vérifiant trois conditions :

1. La probabilité de chaque événement est non nulle
2. Les événements sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire que l'intersection de deux événements est vide)
3. La réunion de tous les événements est l'univers

Lorsqu'on lance un dé classique à 6 faces et qu'on s'intéresse au numéro obtenu, l'univers est l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6} et les événements « obtenir 6 », « obtenir 4 ou 5 » et « obtenir moins de 4 » forment une partition de cet univers.

On peut remarquer en particulier qu'un événement et son contraire, si leurs probabilités ne sont pas nulles, forment une partition de l'univers.

Théorème (formule des probabilités totales). Soit un événement A tel que $p(\text{A}) \neq 0$ et $p(\overline{\text{A}}) \neq 0$.

Pour tout événement B, on a :

$$p(\text{B}) = p(\text{B} \cap \text{A}) + p(\text{B} \cap \overline{\text{A}})$$

et de façon générale, si $\text{A}_1, \text{A}_2, \ldots, \text{A}_n$ est une partition de l'univers, on a :

$$p(\text{B}) = p(\text{B} \cap \text{A}_1) + p(\text{B} \cap \text{A}_2) + \ldots + p(\text{B} \cap \text{A}_n)$$

Démonstration. Démontrons la première égalité du théorème.

Comme elle intervient dans la démonstration, il n'est sans doute pas inutile de rappeler la règle de la somme : $p_{\text{B}}(\text{A}) + p_{\text{B}}(\overline{\text{A}}) = 1$.

Soit A et B deux événements avec $p(\text{A}) \neq 0$ et $p(\overline{\text{A}}) \neq 0$.

$$\begin{aligned} p(\text{B} \cap \text{A}) + p(\text{B} \cap \overline{\text{A}}) &= p_{\text{B}}(\text{A}) \times p(\text{B}) + p_{\text{B}}(\overline{\text{A}}) \times p(\text{B}) \\ &= (p_{\text{B}}(\text{A}) + p_{\text{B}}(\overline{\text{A}})) \times p(\text{B}) \\ &= 1 \times p(\text{B}) \\ &= p(\text{B}) \end{aligned}$$

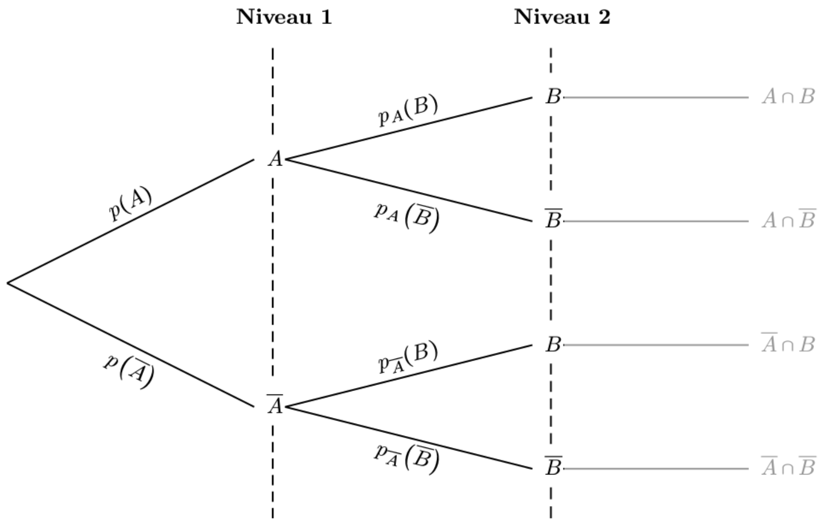
D'après la 1re partie de ce cours, on a alors :

$$p(\text{B}) = p_{\text{A}}(\text{B}) \times p(\text{A}) + p_{\overline{\text{A}}}(\text{B}) \times p(\overline{\text{A}})$$

et en général :

$$p(\text{B}) = p_{\text{A}_1}(\text{B}) \times p(\text{A}_1) + p_{\text{A}_2}(\text{B}) \times p(\text{A}_2) + \ldots + p_{\text{A}_n}(\text{B}) \times p(\text{A}_n)$$

Cette formule permet de calculer la probabilité d'un événement écrit au deuxième niveau d'un arbre pondéré.



$$p(\text{B}) = p(\text{B} \cap \text{A}) + p(\text{B} \cap \overline{\text{A}}) = p_{\text{A}}(\text{B}) \times p(\text{A}) + p_{\overline{\text{A}}}(\text{B}) \times p(\overline{\text{A}})$$

Exemple 1. Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6% sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement. On note D l'événement « le lecteur MP3 est défectueux » et R l'événement « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ». Construire un arbre pondéré puis calculer la probabilité qu'un lecteur MP3 soit rejeté.

II. Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Il ne faut pas confondre « incompatibles » et « indépendants » : deux événements A et B sont incompatibles si $p(A \cap B) = 0$.

Théorème. Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

A et B sont indépendants

$p_A(B) = p(B)$

$p_B(A) = p(A)$

Démonstration. Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

A et B sont indépendants

$\Leftrightarrow$ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B)$

$\Leftrightarrow$ $p_A(B) = p(B)$

En permutant A et B, on obtient la dernière équivalence.

C'est ce théorème qui permet de vraiment comprendre la notion d'événements indépendants. A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de B sachant A est égale à la probabilité de B. Ceci équivaut à dire que la réalisation ou non de l'événement A n'a pas d'influence sur la probabilité de l'événement B. Et vice versa.
On retiendra aussi que si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Exemple 2. Un jeu de 32 cartes classique comprend quatre « couleurs » et chaque couleur comporte 8 cartes. Les quatre couleurs sont cœur (♥), carreau (♦), trèfle (♣) et pique (♠). Les huit cartes de chaque couleur sont : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « la carte tirée est un carreau » et B l'événement « la carte tirée est rouge ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

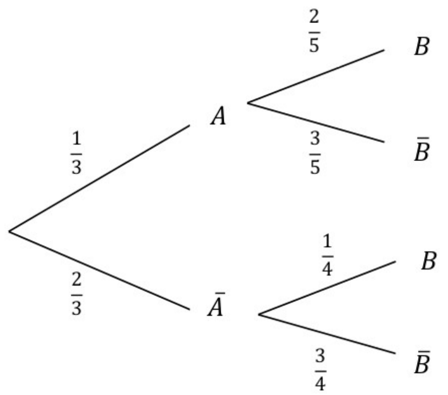
Exemple 3. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « la carte tirée est un carreau » et C l'événement « la carte tirée est un roi ». Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Formule des probabilités totales et indépendance

« De temps en temps, s'arrêter et s'asseoir. Pendant quelques minutes, ne rien faire, juste être. »

Exercice 1

On considère l'arbre de probabilité ci-contre.



1. $p(B)$ vaut :

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{13}{20}$ d) $\frac{3}{10}$

2. Les évènements A et B sont-il indépendants ?

Exercice 2

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert : un assortiment de macarons et une part de tarte tatin. Des études statistiques montrent que : l'assortiment de macarons est choisi par 50 % des clients ; la part de tarte tatin, est choisie par 30 % des clients ; 20 % des clients ne prennent pas de dessert ; aucun client ne prend plusieurs desserts.

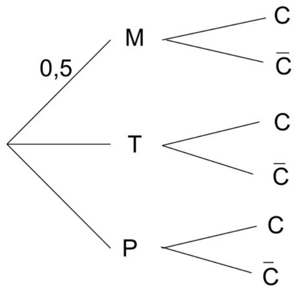
Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.
On note les événements suivants :

- M : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'événement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ probabilité de T et celle de $p_T(C)$ probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement M ∩ C puis calculer $p(M \cap C)$.
   b. Montrer que $p(C) = 0{,}76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (On donnera le résultat arrondi au centième).

Exercice 3

150 élèves d'un établissement sont inscrits aux activités du midi : 30 sont inscrits en musique ; 45 sont inscrits en sport ; 75 sont inscrits en cinéma.

Chaque élève pratique une et une seule activité.

Parmi les élèves inscrits en musique, 30 % sont des filles.

Parmi les élèves inscrits en sport, 60 % sont des filles.

Parmi les élèves inscrits en cinéma, 72 % sont des filles.

On choisit au hasard un élève inscrit aux activités du midi.

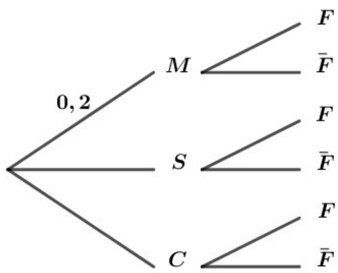
On note :

F l'événement : « l'élève choisi est une fille »,

M l'événement : « l'élève choisi est inscrit en musique »,

S l'événement : « l'élève choisi est inscrit en sport »,

C l'événement : « l'élève choisi est inscrit en cinéma ».



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille inscrite en musique.
3. Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit une fille est égale à 0,6.
4. Les évènements S et F sont-ils indépendants ?
5. Sachant que l'élève choisi est un garçon, calculer la probabilité qu'il soit inscrit en cinéma.

Exercice 4

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :

S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;

M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

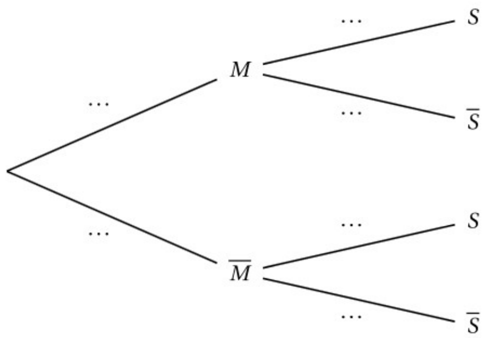
On note $\overline{S}$ et $\overline{M}$ les événements contraires des événements S et M.

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,95.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,96.

1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, modélisant cette situation :



3. Montrer que $P(S) = 0{,}04182$.
4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique en passant. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
5. Les événements M et S sont-ils indépendants ?