VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Pour revenir à ce menu, cliquer sur le titre de la page en cours.

1. DÉFINITION ET LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

2. ESPÉRANCE, VARIANCE ET ÉCART TYPE

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES : DÉFINITION ET LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

« La probabilité que la vie apparaissent sur la Terre était quasiment nulle : le simple fait de respirer est un vrai miracle. »

Activité.

Une urne comprend une boule verte, une boule bleue et deux boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules.

Une boule bleue rapporte 1 point, une boule verte rapporte 2 points et chaque boule rouge fait perdre 1 point.

On s'intéresse au gain algébrique (c'est-à-dire positif ou négatif), noté X, que peut obtenir un joueur à ce jeu.

1. Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique X ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement « $X = -2$ » ?
3. Calculer $p(X = +1)$.
4. Donner la probabilité de chaque gain (on pourra rassembler les résultats dans un tableau).

Gain X					
Probabilité					

5. Calculer $p(X \geq 0)$.

Variables aléatoires réelles : Définition et loi d'une variable aléatoire réelle

« La probabilité que la vie apparaissent sur la Terre était quasiment nulle : le simple fait de respirer est un vrai miracle. »

I. Définition

Définition. Une variable aléatoire X est une fonction qui à chaque issue d'une expérience aléatoire, associe un nombre réel.

Exemple 1. Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6% sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98% des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

Un lecteur rejeté et défectueux coûte 15 € à l'entreprise, un lecteur rejeté mais qui n'est pas défectueux ne coûte rien, un lecteur qui n'est pas rejeté mais qui est défectueux coûte 50 € et un lecteur qui n'est pas rejeté et qui n'est pas défectueux rapporte 30 €. On définit la variable aléatoire X qui donne le gain, éventuellement négatif, d'un lecteur choisi au hasard.

On note D l'évènement « le lecteur est défectueux » et R l'évènement « le lecteur est rejeté ».

1. Quelle est la probabilité de l'évènement $X = -15$? Interpréter le résultat.

2. Calculer $p(X \leq 0)$. Interpréter le résultat.

Solution.

1. Un lecteur rejeté et défectueux coûte 15 € à l'entreprise donc :

$$p(X = -15) = p(R \cap D) = p_D(R) \times p(D) = 98\,\% \times 6\,\% = 5{,}88\,\%$$

La probabilité que le lecteur choisi au hasard coûte 15 € à l'entreprise est 5,88 %.

2. L'évènement $X \leq 0$ est l'évènement contraire de $X > 0$. Seul un lecteur qui n'est pas rejeté et qui n'est pas défectueux rapporte un gain positif (de 30 €) à l'entreprise. Donc :

$$p(X > 0) = p(X = 30) = p(\overline{R} \cap \overline{D}) = p_{\overline{D}}(\overline{R}) \times p(\overline{D}) = (1 - 5\,\%) \times (1 - 6\,\%) = 89{,}3\,\%$$

ce dont on déduit :

$$p(X \leq 0) = 1 - p(X > 0) = 1 - 89{,}3\,\% = 10{,}7\,\%$$

La probabilité que le lecteur choisi au hasard apporte un gain négatif ou nul à l'entreprise est 10,7 %.

II. Loi de probabilité

Définition : Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire, c'est donner la probabilité de chacune des valeurs prises par celle-ci.

Exemple 2. Déterminer la loi de probabilité de la variable X définie dans l'exemple 1.

Solution.

Le gain X prend les valeurs –50, –15, 0 et 30.

$$p(X = -50) = p(\overline{R} \cap D) = p_D(\overline{R}) \times p(D) = (1 - 98\,\%) \times 6\,\% = 0{,}12\,\%$$

$$p(X = 0) = p(R \cap \overline{D}) = p_{\overline{D}}(R) \times p(\overline{D}) = 5\,\% \times (1 - 6\,\%) = 4{,}7\,\%$$

On peut alors vérifier que :

$$\begin{aligned} p(X = -50) + p(X = -15) + p(X = 0) + p(X = 30) &= 0{,}12\,\% + 5{,}88\,\% + 4{,}7\,\% + 89{,}3\,\% \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et on peut enfin présenter cette loi de probabilité dans un tableau :

x_i	–50	–15	0	30
$P(X = x_i)$	0,12 %	5,88 %	4,7 %	89,3 %

Variables aléatoires réelles : Définition et loi d'une variable aléatoire réelle

« La probabilité que la vie apparaissent sur la Terre était quasiment nulle : le simple fait de respirer est un vrai miracle. »

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par ce tableau :

x_i	-3	2	5	10
$P(X = x_i)$	0,3	0,21	0,13	0,36

On peut en déduire que :

a. $P(X > 2) = 0{,}49$ a. $P(X > 2) = 0{,}51$ a. $P(X \geq 2) = 0{,}49$ a. $P(X \geq 2) = 0{,}51$

2. On prend successivement et sans remise deux boules d'une urne contenant 4 boules rouges et une boule verte. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenu. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

a. $p(X = 0) = 0{,}6$ et $p(X = 1) = 0{,}4$

b. $p(X = 0) = 0{,}25$, $p(X = 1) = 0{,}5$ et $p(X = 2) = 0{,}25$

c. $p(X = 0) = 0{,}8$ et $p(X = 1) = 0{,}2$

d. $p(X = 0) = 0{,}64$, $p(X = 1) = 0{,}32$ et $p(X = 2) = 0{,}04$

Exercice 2

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Limoges en passant par Orléans est surchargée.

Lors de ces journées classées « rouges », on a pu observer le comportement des automobilistes faisant le trajet de Paris à Limoges en passant par Orléans.

Pour le trajet de Paris à Orléans, 30 % d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute.

Pour le trajet d'Orléans à Limoges : parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans, 40 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute ; parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans, 45 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute.

On choisit un automobiliste au hasard parmi ceux effectuant, en journée classée rouge, le trajet Paris – Limoges en passant par Orléans.

On note N l'événement « l'automobiliste prend la route nationale entre Paris et Orléans » et D l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Orléans et Limoges ».

Si A est un évènement, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Donner l'arbre de probabilité représentant cette situation.

2. Calculer $p(N \cap \overline{D})$ et interpréter le résultat.

3. Montrer que la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la Route Départementale entre Orléans et Limoges est 0,565.

4. Lors de ces journées classées « rouges », on donne les temps de parcours suivants :

Paris – Orléans, par autoroute : 3 heures ;

Paris – Orléans, par nationale : 2 heures ;

Orléans – Limoges, par autoroute : 4 heures ;

Orléans – Limoges, par départementale : 3 heures et demie.

On note X la variable aléatoire égale au temps total de parcours de l'automobiliste. Donner, en la justifiant, la loi de probabilité de X.

Exercice 3

La gestionnaire d'un cinéma s'intéresse à la catégorie des films vus par ses spectateurs, ainsi qu'à leur consommation au rayon « friandises ». Une étude sur plusieurs mois a montré que 40 % des spectateurs sont allés voir un film d'action, 35 % un dessin animé et les autres une comédie.

Parmi les spectateurs allant voir un film d'action, la moitié achètent des friandises, alors qu'ils sont 80 % pour ceux allant voir un dessin animé et 70 % pour ceux allant voir une comédie.

On interroge au hasard un spectateur sortant du cinéma et on note :

A l'événement : « le spectateur a vu un film d'action »,

D l'événement : « le spectateur a vu un dessin animé »,

C l'événement : « le spectateur a vu une comédie »,

F l'événement : « le spectateur a acheté des friandises ».

1. Donner l'arbre de probabilité représentant la situation.

2. Démontrer que $p(F) = 0{,}655$.

3. On interroge au hasard un spectateur ayant acheté des friandises. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dessin animé ? On donnera l'arrondi à 10^{-3}.

4. Une place de cinéma coûte 10 €. On considérera que si un spectateur achète des friandises, il dépense 18 € pour sa place de cinéma et ses friandises. On note X la variable aléatoire donnant le coût d'une sortie au cinéma pour un spectateur.
Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X.

Exercice 4

Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties.

Un client achète au plus une nappe et au plus un lot de serviettes.

En consultant le fichier des ventes de l'entreprise, on constate que :

20% des clients achètent une nappe ;

Parmi les clients ayant acheté une nappe, 70 % ont acheté un lot de serviettes ;

Parmi les clients n'ayant pas acheté de nappe, 10 % ont tout de même acheté un lot de serviettes.

On choisit au hasard un client de cette entreprise.

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A et $p(A)$ la probabilité de l'événement A.

On note les événements suivants :

N « le client achète une nappe » ;

S « le client achète un lot de serviettes ».

1. Créer l'arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité que le client achète une nappe et un lot de serviettes.

3. Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,22.

4. Calculer la probabilité que le client achète une nappe sachant qu'il a acheté une serviette.

5.Une nappe est vendue 45 € et un lot de serviettes 25 €. On appelle D la variable aléatoire donnant la dépense effectuée par un client.
Donner, en la justifiant, la loi de probabilité de D.

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES : ESPÉRANCE, VARIANCE ET ÉCART TYPE

« La probabilité que la vie apparaissent sur la Terre était quasiment nulle : le simple fait de respirer est un vrai miracle. »

Activité. On tire une carte au hasard parmi 30 cartes numérotées de 1 à 30.

Jeux 1

On gagne 10 € si le nombre est inférieur ou égal à 6,
sinon on perd 2 €.

Jeux 2

On gagne 13 € si le nombre est inférieur ou égal à 9,
sinon on perd 5 €.

Si on enchaîne plusieurs parties d'affilées (voir une simulation), à quel jeu est-il préférable de jouer pour espérer le plus grand gain final ?

Vidéo pour se changer les idées mais sur les statistiques quand même

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES : ESPÉRANCE, VARIANCE ET ÉCART TYPE

« La probabilité que la vie apparaissent sur la Terre était quasiment nulle : le simple fait de respirer est un vrai miracle. »

I. ESPÉRANCE

On lance une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 10 € à chaque fois qu'on obtient pile, et on perd 10 € à chaque fois qu'on obtient face. On s'intéresse au gain moyen après plusieurs lancers, c'est-à-dire au gain final obtenu, éventuellement négatif, divisé par le nombre de lancers.

En jouant un très grand nombre de fois, on constate que les gains s'équilibrent petit à petit, que les gains positifs et négatifs se compensent et que le gain moyen tend vers 0 € : on peut s'en convaincre avec cette simulation d'un grand nombre de lancers.

Cette limite du gain moyen, c'est ce qu'on appelle l'**espérance**.

L'espérance est au probabilités ce que la moyenne pondérée est aux statistiques.

Elle peut être calculée à partir de la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au gain algébrique :

x_i	– 10	10
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

L'espérance de X, que l'on note E(X), est alors égale à $-10\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}=0$.

Définition. Soit X une variable aléatoire dont les valeurs sont x_1, x_2, … et x_n et les probabilités associées p_1, p_2, … et p_n.
L'espérance mathématique, notée E(X), est :

$$E(X) = x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n\ .$$

Exemple 1. On lance un dé équilibré, et on gagne 1€ si le résultat est 4 ou 5, 3€ si le résultat est 6, et on perd 2€ autrement. On définit la variable aléatoire X qui, à chaque issue du lancer du dé, associe le gain obtenu (éventuellement négatif). Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	–2	1	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat.

Solution. $E(X)=-2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$

L'espérance est égale à $-\frac{1}{6}$.

En jouant un grand nombre de fois, un joueur perdra en moyenne $\frac{1}{6}$ € : le jeu est défavorable au joueur.

On se souviendra donc que l'espérance d'une variable aléatoire est la limite de sa valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétition de l'expérience aléatoire. Si c'est un jeu, cela permet de savoir s'il est favorable au joueur (espérance positive), défavorable au joueur (espérance négative) ou équitable (espérance nulle).

Exemple 2. On lance un dé équilibré. On perd 2€ si le résultat est 1, 2 ou 3, et on gagne 1€ si le résultat est 4 ou 5. Déterminer le gain x à attribuer si le résultat est 6 pour que le jeu soit équitable.

x_i	–2	1	x
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Solution. On cherche x tel que $E(X) = 0$ soit $-2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+x\times\frac{1}{6}=0$ ce qui donne $x\times\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}$ et enfin $x = 4$.

Pour que le jeu soit équitable, il faut gagner 4€ lorsque le résultat est 6.

II. Variance et écart-type

On lance une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 10 € si on obtient pile, et on perd 10 € sinon. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu. On a E(X) = 0.

Une variante consiste à réduire les gains. On lance une pièce de monnaie équilibrée mais on gagne 1 € si on obtient pile, et on perd 1 € sinon. On note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu. On a aussi E(Y) = 0.

Une autre variante consiste au contraire à augmenter les gains. On lance une pièce de monnaie équilibrée mais on gagne 100 € si on obtient pile, et on perd 100 € sinon. On note Z la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu. On a là aussi E(Z) = 0.

En résumé :

x_i	–10	10
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y_i	–1	1
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

z_i	–100	100
$p(Z=z_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On a E(X) = E(Y) = E(Z) = 0.

L'espérance est toujours nulle et ne rend pas compte du risque pris pour chaque jeu : faible, modéré ou important.

Rendre compte de ce risque, c'est l'objectif de l'**écart-type** : il indique l'écart moyen du gain obtenu par rapport à l'espérance du jeu.

Pour le calculer, on passe par un indicateur intérmédiaire, le carré de l'écart-type, appelé **variance**.

$V(X) = (-10-0)^2\times\frac{1}{2} + (10-0)^2\times\frac{1}{2} = 100$ donc $\sigma(X) = 10$.

$V(Y) = (-1-0)^2\times\frac{1}{2} + (1-0)^2\times\frac{1}{2} = 1$ donc $\sigma(Y) = 1$.

$V(Z) = (-100-0)^2\times\frac{1}{2} + (100-0)^2\times\frac{1}{2} = 10\,000$ donc $\sigma(Z) = 100$.

Le risque pris pour chaque jeu est désormais quantifiable.

Définitions. Soit X une variable aléatoire dont les valeurs sont x_1, x_2, … et x_n et les probabilités associées p_1, p_2, … et p_n.

La variance de la variable X, notée V(X), est :

$$V(X) = (x_1-E(X))^2 p_1 + (x_2-E(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n-E(X))^2 p_n .$$

L'écart-type de la variable X, noté $\sigma(X)$, est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} .$$

Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs obtenues seront, en moyenne, éloignées de l'espérance.

▶ Calculer la variance et l'écart-type

Exemple 3. Reprenons maintenant l'exemple 1 du paragraphe sur l'espérance : on lance un dé équilibré, et on gagne 1€ si le résultat est 4 ou 5, 3€ si le résultat est 6, et on perd 2€ autrement. X est la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.

x_i	–2	1	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On rappelle que E(X) = $-\frac{1}{6}$. Calculer la variance V(X) puis l'écart-type $\sigma(X)$. Arrondir l'écart-type au centième et interpréter ce résultat.

Solution. $V(X) = \left(-2-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2\times\frac{1}{2} + \left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2\times\frac{1}{3} + \left(3-\left(-\frac{1}{6}\right)\right)^2\times\frac{1}{6} = \frac{137}{36}$ donc $\sigma(X) = \frac{\sqrt{137}}{6} \approx 1{,}95$.

En moyenne, les résultats du lancer seront éloignés de $-\frac{1}{6}$ (l'espérance) d'environ 1,95.

La calculatrice permet aussi de trouver l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire : la fonction « stats », « CALC », « 1 : Stats 1 Var » permet d'obtenir des valeurs approchées de E(X) et de $\sigma(X)$. Pour une valeur approchée de la variance, il faudra élever ce dernier résultat au carré, la calculatrice n'ayant pas de fonction pour calculer la variance (voir la vidéo).

▶ Calculer l'espérance et l'écart-type avec la calculatrice

Variables aléatoires réelles : Espérance, variance et écart type

« La probabilité que la vie apparaissent sur la Terre était quasiment nulle : le simple fait de respirer est un vrai miracle. »

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Lors d'un jeu, on mise 1 euro et on tire une carte au hasard parmi 30 cartes numérotées de 1 à 30. On gagne 3 euros si le nombre porté sur la carte est premier, sinon, on ne gagne rien. On détermine le gain algébrique en déduisant le montant de la mise de celui du gain. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique. Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X ?

2. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

Valeurs x_i	– 2	0	5
$p_i = P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

L'espérance de la variable aléatoire X est égale à 0,4. Calculer la variance de X.

Exercice 2

Un parent d'élèves propose un jeu pour la fête de l'école.

Une urne opaque contient 100 billes indiscernables au toucher : 10 billes rouges, 30 billes blanches et 60 billes vertes.

Pour une partie, chaque joueur doit miser 2 jetons. Ensuite, le joueur prélève une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille prélevée est rouge, le joueur récupère 8 jetons.
- Si la bille est blanche, le joueur récupère 4 jetons.
- Si la bille est verte, le joueur ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en nombre de jetons, c'est-à-dire, le nombre de jetons gagnés diminué de la mise.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Démontrer que le jeu est équitable, c'est-à-dire que l'espérance de X est nulle.
3. Calculer la variance puis l'écart-type de X. On arrondira au centième.
4. Pour financer les différentes actions de l'école, les organisateurs de la fête veulent modifier le jeu pour qu'il leur devienne favorable. Ils décident alors d'ajouter des billes vertes dans l'urne. On note n le nombre de billes vertes à ajouter dans l'urne.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de n.
   b. Exprimer alors E(X) en fonction de n.
   c. Combien de billes vertes doit-on ajouter dans l'urne pour que l'espérance du jeu soit égale à -1 ?

Exercice 3

Voici la répartition des 150 adhérents d'un club de sport :

Âge	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans
Nombre de filles	17	39	22	10
Nombres de garçons	13	36	8	5
Total	30	75	30	15

On choisit un adhérent au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'adhérent choisi ait 17 ans ?
2. L'adhérent choisi a 18 ans. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
3. On note X la variable aléatoire donnant l'âge de l'adhérent choisi. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Calculer $P(X \geq 16)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Exercice 4

Un parfumeur propose l'un de ses parfums, appelé « Fleur Rose », et cela uniquement avec deux contenances de flacons : un de 30 ml ou un de 50 ml. Pour l'achat d'un flacon « Fleur Rose », il propose une offre promotionnelle sur un autre parfum appelé « Bois d'ébène ». On dispose des données suivantes :

- 58 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 30 ml et, parmi ceux- là, 24 % achètent également un flacon du parfum « Bois d'ébène » ;
- 42 % des clients achètent un flacon de parfum « Fleur Rose » de 50 ml et, parmi ceux-là, 13 % achètent également un flacon du parfum « Bois d'ébène ».

On admet qu'un client donné n'achète qu'un seul flacon de parfum « Fleur de Rose » (soit en 30 ml soit en 50 ml), et que s'il achète un flacon du parfum « Bois d'ébène », il n'en achète aussi qu'un seul flacon.

On choisit au hasard un client achetant un flacon du parfum « Fleur Rose ». On considère les événements suivants :

F : « le client a acheté un flacon « Fleur Rose » de 30 ml » ;

B : « le client a acheté un flacon « Bois d'ébène ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'exercice.
2. Calculer la probabilité $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{B})$.
3. Calculer la probabilité que le client ait acheté un flacon « Bois d'ébène ».
4. Un flacon « Fleur Rose » de 30 ml est vendu 40 €, un flacon « Fleur Rose » de 50 ml est vendu 60 € et un flacon « Bois d'ébène » 25 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au montant total des achats par un client du parfum « Fleur Rose ».

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.