Consolidation 1

« Rien de valable n'est accompli du jour au lendemain. » Henepola Gunaratana

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis factoriser lorsque cela est possible.

1. $6x^2-15x-9=0$
2. $\frac{1}{8}x^2+x+2=0$
3. $x^2+x+1=0$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $2x^2-5x-42\geq 0$
2. $5x^2+8x+1\leq 2\left(x^2+3x\right)$
3. $(2x-8)(2x+8)>2x^2+12x-82$

Exercice 3

Simplifier les écritures suivantes :

$A(x)=e^{2x-1}e^{-x+1}$ $\quad B(x)=\frac{e^{2-x}}{e^{1-2x}}$ $\quad C(x)=\frac{e^x+e^x}{e^x}$ $\quad D(x)=\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

$E(x)=\frac{x}{5}+\frac{1}{x}$ $\quad F(x)=\frac{3x}{x-7}+\frac{5}{x}$ $\quad G(x)=\frac{x}{2x-2}+\frac{3}{x-1}$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x)=10e^x-5xe^x$ $\quad B(x)=\frac{e^x}{7}+4xe^x$ $\quad C(x)=3e^{-5x}+(-15x+35)e^{-5x}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $e^{-3x}=e^{x+1}$
2. $e^{-2x}=0$
3. $e^{2x+7}\geq 1$
4. $e^{-x}\leq e^x$
5. $e^x>e$

[« L'interview d'Hugo Duminil-Copin, médaillé Fields », ScienceEtonnante]

Consolidation 2

Rappels utiles sur les racines carrées :

- $\sqrt{a^2} = |a|$ si a est réel ; $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ pour $a, b \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ pour $b > 0$; $(\sqrt{a})^2 = a$

Dans chaque exercice, x désigne un nombre réel strictement positif.

Exercice 1

a) Factoriser : $x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$

b) Développer : $(\sqrt{x} + 2)(x + \sqrt{x})$

c) Réduire au même dénominateur : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x}$

d) Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $f'(x)$.

Exercice 2

a) Factoriser : $2\sqrt{x}(x-1) + 3(x-1)$

b) Développer : $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)$

c) Réduire au même dénominateur : $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) Soit $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$. Calculer $f'(x)$.

Exercice 3

a) Développer et simplifier : $(\sqrt{3x+2})^2 - (x + \sqrt{3x+2})$

b) Soit $f(x) = \sqrt{2x+5}$. Calculer $f'(x)$.

c) Soit $g(x) = (x+1)\sqrt{2x+3}$. Calculer $g'(x)$.

Consolidation 3

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Déterminer la nature de cette suite.

Exercice 2

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 16$ et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = -\frac{3}{4} \times v_n.$$

1. Étudier le sens de variation de la suite (v_n).
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Conjecturer la limite de la suite v_n.

Exercice 3

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$w_{n+2} = -3w_{n+1} - 2w_n.$$

1. Calculer w_1, w_2 et w_3.
2. Étudier le sens de variation de la suite (w_n).

Exercice 4

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0{,}8u_n + 3, \\ v_n = 15 - u_n. \end{cases}$$

1. La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ? Justifier.
2. La suite (u_n) est-elle une suite géométrique ? Justifier.
3. La suite (v_n) est-elle une suite arithmétique ? Justifier.
4. La suite (v_n) est-elle une suite géométrique ? Justifier.

Consolidation 4

Exercice 1

On lance un dé équilibré à six faces. On associe à chaque face un gain, donné par la variable aléatoire X :

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Gain (en €)	1	-2	1	-2	4	-2

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ (arrondir à 0,01 près).
4. Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 2

Une entreprise étudie le comportement de ses clients face à un nouveau produit :

- 70 % des clients ont entendu parler du produit (événement A).
- 40 % des clients achètent le produit (événement B).
- 35 % des clients ont entendu parler du produit **et** achètent le produit.

1. Vérifier si les événements A et B sont indépendants.
2. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte.

Exercice 3

Un sac contient des boules rouges et vertes, de deux tailles : petites et grandes.

- 40 % des boules sont rouges.
- Parmi les boules rouges, 30 % sont petites.
- Parmi les boules vertes, 60 % sont petites.

On choisit une boule au hasard.

1. Construire un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. Calculer la probabilité que la boule choisie soit petite.
3. Sachant que la boule est petite, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Exercice 4

On reprend la situation de l'exercice 1. On lance le dé deux fois, de manière indépendante. On note Y la variable aléatoire égale à la somme des deux gains obtenus. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Consolidation 5

Exercice 1

Déterminer l'expression $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f. Simplifier l'écriture au maximum.

1. $f(x) = 10x^3 - 3x^2 + 5x + 100$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x+1}$
3. $f(x) = e^{-3x}$
4. $f(x) = x^2 e^x$
5. $f(x) = xe^{-x}$

Exercice 2

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction

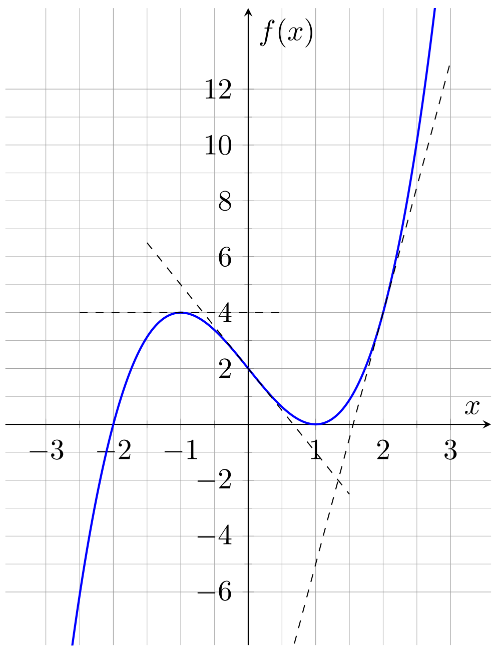
$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. À l'aide du graphique, conjecturer les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 2.

2. Déterminer par le calcul les coefficients directeurs des tangentes aux points d'abscisses -1, 0 et 2.

3. Déterminer les équations des tangentes au point d'abscisse -1, 0 et 2.



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 30$$

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-x)e^{2x-3}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en $x = 0$.