3 – Calcul littéral 1

Le calcul littéral, c'est simplement du calcul dans lequel des lettres représentent des nombres : elles sont utilisées à la place des nombres par exemple quand un nombre est inconnu (on le recherche) ou bien quand il peut prendre plein de valeurs, mais qu'on veut rester dans le cas général (la formule du périmètre d'un cercle).

Définitions : Une somme est le résultat d'une addition de deux nombres appelés les termes.
Une différence est le résultat d'une soustraction de deux nombres appelés les termes.
Un produit est le résultat d'une multiplication de deux nombres appelés les facteurs.
Un quotient est le résultat d'une division (décimale) d'un nombre appelé dividende par un autre nombre appelé diviseur.

Les expressions littérales comportent souvent plusieurs opérations. Il faut donc connaître leurs *règles de priorité*.

Les règles de priorité des opérations sont les suivantes :

1. les opérations entre parenthèses ;
2. les multiplications et les divisions (de gauche à droite si elles se suivent) ;
3. les additions et les soustractions (de gauche à droite si elles se suivent).

La dernière opération à effectuer dans un calcul lui donne son nom.

Exercice : calculer $23 - 2 \times 6$ et $4 \times (20 - 10 \div 2)$ et donner le nom de chaque calcul.

Solution : $23 - 2 \times 6 = 23 - 12 = 11$

La dernière opération est une soustraction donc $23 - 2 \times 6$ est une différence.

$4 \times (20 - 10 \div 2) = 4 \times (20 - 5) = 4 \times 15 = 60$

La dernière opération est une multiplication donc $4 \times (20 - 10 \div 2)$ est un produit.

Définition : une expression littérale est un calcul dans lequel un nombre est désigné par une lettre.

Exemple : x désigne un nombre. Le calcul $2 \times x + 3$ est une expression littérale.

Les expressions littérales peuvent être utilisées par exemple pour traduire des propriétés générales.

Dans les égalités suivantes, a et b désignent n'importe quels nombres.

$a + 0 = a$ $\qquad$ $a \times 1 = a$ $\qquad$ $a + b = b + a$ $\qquad$ $a \times b = b \times a$

Les expressions littérales peuvent aussi être utilisées pour démontrer un résultat général.

La somme de trois entiers consécutifs est (toujours) un multiple de 3.

Si on appelle n le nombre entier du milieu, les deux autres entiers sont $n - 1$ et $n + 1$. La somme de ces 3 entiers peut donc s'écrire : $n - 1 + n + n + 1$.

Maintenant, simplifions cette expression littérale :

$n - 1 + n + n + 1 = n + n + n - 1 + 1 = 3 \times n$

$3 \times n$ étant par définition un multiple de 3, on vient de prouver dans le cas général que la somme de trois entiers consécutifs est (toujours) un multiple de 3.

Enfin, nous ajoutons un petit complément pour la simplification des écritures.

Le signe $\times$ peut être caché quand il est situé avant une lettre.
Le signe $\times$ peut être caché quand il est situé avant une parenthèse.

Exemples : $2a = 2 \times a$

$2(x+3) = 2 \times (x+3)$ $\qquad$ (« $2(x+3)$ » se lit parfois « 2 facteur de $x+3$ »)

$24 + 2x = 24 + 2\times x$

Mais le signe $\times$ n'est jamais caché quand il est situé avant un chiffre. Cela donnerait des aberrations : $2\times 3 = 23$!

Nous abordons maintenant la *propriété de la distributivité simple* qui permet de transformer des expressions littérales.

Propriété de la distributivité simple (appelé aussi distributivité de la multiplication sur l'addition) :

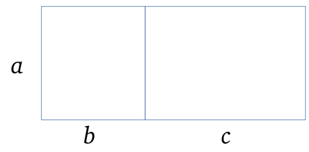
a, b et c désignent n'importe quels nombres.

$$a \times (b + c) = a\times b + a\times c$$

On peut aussi écrire :

$$a(b+c) = ab + ac$$

Preuve : considérons un grand rectangle composé de deux petits rectangles, dont les dimensions sont les nombres a, b et c (dans n'importe quelle unité).



Les dimensions du grand rectangle sont a et $b + c$ donc son aire est $a \times (b + c)$.

Les aires des petits rectangles sont $a\times b$ et $a\times c$, ce qui, en les additionnant, donne l'aire du grand rectangle : $a\times b + a\times c$.

On a donc, en conclusion : $a \times (b + c) = a\times b + a\times c$.

Exemples

La distributivité est parfois utilisée en calcul numérique, pour calculer par exemple 15×11, 15×12, 15×13... :

$$15\times(10+1) = 15\times 10 + 15\times 1 = 150 + 15 = 165$$

$$15\times(10+2) = 15\times 10 + 15\times 2 = 150 + 30 = 180$$

$$15\times(10+3) = 15\times 10 + 15\times 3 = 150 + 45 = 195$$

En calcul littéral, on peut aussi transformer l'expression littérale $15\times(10+x)$:

$$15\times(10+x) = 15\times 10 + 15\times x = 150 + 15\times x = 150 + 15x$$

Propriété de la distributivité simple (appelée aussi distributivité de la multiplication sur la soustraction) :

a, b et c désignent n'importe quels nombres.

$$a \times (b - c) = a\times b - a\times c$$

$$a(b - c) = ab - ac \text{ (écriture simplifiée)}$$

Exemple : $3\times(b - 3) = 3\times b - 3\times 3 = 3b - 9$

Définition : développer, c'est transformer un produit en somme ; factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Développer, c'est utiliser la distributivité dans ce sens : $a \times (b+c) = a\times b + a\times c$.

Factoriser, c'est utiliser la distributivité dans l'autre sens : $a\times b + a\times c = a \times (b+c)$.

Exercice : Développer et simplifier $3\times(6 + a)$.

Solution : $3\times(6 + a) = 3\times 6 + 3\times a = 18 + 3\times a = 18 + 3a$

$18 + 3a$ est l'expression développée de $3\times(6 + a)$.

Exercice : Factoriser $24 + 2\times x$.

Solution : $24 + 2\times x = 2\times 12 + 2\times x = 2\times(12 + x) = 2(12 + x)$

$2(12 + x)$ est l'expression factorisée de $24 + 2\times x$

3 – Calcul littéral 1

Exercice 1

Calculer, en écrivant toutes les étapes puis donner le nom de chaque calcul.

$48-3\times 6$ $\quad 4\times(20-12)$ $\quad 25\times 4+13\times 2$ $\quad \dfrac{8\times 3}{6}$

Exercice 2

1) Montrer que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours un multiple de 5.

2) Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs n'est pas toujours un multiple de 4.

3) Montrer que la somme de deux entiers consécutifs n'est jamais un nombre pair.

Exercice 3

Recopier puis cacher, si possible, le signe $\times$ dans les expressions suivantes.

$3\times a$ $\quad 2\times(x+3)$ $\quad 2\times 5+x$ $\quad 24+2\times x$

$2\times(L+l)$ $\quad 2\times L+2\times l$ $\quad 2\times\pi\times r$ $\quad \dfrac{B\times h}{2}$

Exercice 4

Exemple 1 : $15\times 12=15\times(10+2)=15\times 10+15\times 2=150+30=180$

Exemple 2 : $15\times 8+15\times 2=15\times(8+2)=15\times 10=150$

Calculer de la même façon :

41×12 $\quad 31\times 21$ $\quad 13\times 7+13\times 3$ $\quad 31\times 19$ $\quad 13\times 14-13\times 4$

Exercice 5

Développer et simplifier les expressions suivantes.

$10\times(8+x)$ $\quad 4(b-5)$ $\quad L\times(5+l)$ $\quad (2+x)\times 9$ $\quad 4b\times(5-b)$ $\quad -7(a+5)$

Exercice 6

Factoriser les expressions suivantes.

$24+2\times x$ $\quad 2\times L+2\times l$ $\quad 3\times x-2\times x$ $\quad 9-3\times x$ $\quad 7\times x-x\times 4$ $\quad 3(x+2)+x\times(x+2)$

Exercice 7

Voici un programme de calcul :

On choisit un nombre entier.

On le multiplie par le nombre entier qui le suit.

On soustrait à ce résultat le nombre de départ.

1) Vérifier que si le nombre choisi est 5, on obtient 25.

2) Montrer que le résultat final est toujours le carré du nombre de départ.

Questions rapides

Exercice 1

1) Quels sont les nombres premiers compris entre 1 et 30 et dont le chiffre des unités est 7 ?

2) AB = 8 cm, BC = 10 cm et AC = 6 cm. Le triangle ABC est-il rectangle ?

3) Les fractions $\frac{8}{20}$ et $\frac{10}{25}$ sont-elles égales ?

4) Donner un ordre de grandeur de 0,0095 m.

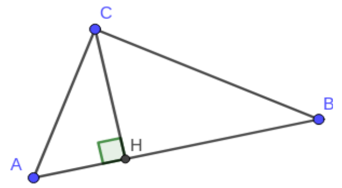
Exercice 2

1) 49 est-il un nombre premier ?

2) L'égalité $4 \times x + 2 \times x = 7 \times x - 5$ est-elle vraie pour $x = 5$.

3) $\widehat{ABC} = 55°$ et $\widehat{BAC} = 50°$. Quel est la mesure du 3e angle du triangle ABC ?

4) Sur la figure, AB = 6 cm, BC = 3 cm et CH = 2 cm. Calculer l'aire du triangle ABC.



Exercice 3

1) Quel est le reste de la division euclidienne de 53 par 7 ?

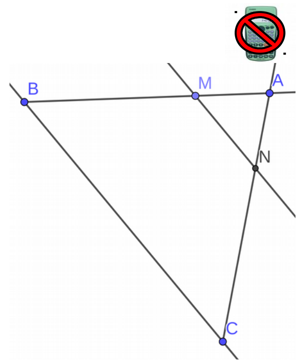
2) Développer $3(2+x)$.

3) Sur la figure, AM = 5 cm, AN = 6 cm, AC = 18 cm, BC = 21 cm et (AB)//(MN).

Calculer AB.

4) Trouver, si possible, les nombres manquants dans les égalités suivantes :

$$4 + ... = 1 \qquad ... \times 20 = 5 \qquad ... \times 7 = 1$$



Exercice 4

1) Un jean coûtait 30 €, mais Célia l'a eu avec 5 % de réduction. Combien Célia a-t-elle payé le jean ?

2) Un triangle ABC est rectangle en C. On a AB = 5 cm et BC = 3 cm. Calculer AC.

3) Factoriser $2x + 6$.

4) Exprimer sous la forme d'une puissance de dix chacun des nombres suivants :

1 000 ; 100 000 ; 10 ; 1 ; 0,01 ; 0,1