

LES PUISSANCES

« Le savant sait qu'il ignore. » Victor Hugo

I. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

Définitions. Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul.

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (} n \text{ fois)}$$

$$\text{Pour tout } a \neq 0 : \quad a^0 = 1 \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

On a en particulier : $0^n = 0$ (pour $n \neq 0$) et $a^1 = a$.

Par contre, 0^0 n'est pas défini.

Exemples.

$3^0 = 1$	$(-0,75)^0 = 1$	$\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$	$x^0 = 1 \text{ (} x \neq 0 \text{)}$
$3^1 = 3$	$(-5)^1 = -5$	$\left(\frac{7}{3}\right)^1 = \frac{7}{3}$	$x^1 = x$
$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$(-3)^{-1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$	$x^{-1} = \frac{1}{x}$
$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$		$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

II. PROPRIÉTÉS

L'exposant peut donc être un nombre entier positif ou négatif : les propriétés suivantes sont valables pour des exposants entiers relatifs (et non seulement naturels).

Propriétés. Soient a un nombre réel et n et p deux entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \text{ (} a \neq 0 \text{)} \quad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

Exemples.

$2^3 \times 2^4 = 2^7$	$x^5 \times x^{-2} = x^{5+(-2)} = x^3$
$\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$	$\frac{x^5}{x^7} = x^{5-7} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \text{ (} x \neq 0 \text{)}$
$\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \times (-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$	$(x^2)^{-3} = x^{2 \times (-3)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6} \text{ (} x \neq 0 \text{)}$

Propriétés. Soient a et b deux nombres réels et n un entier relatif.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ (} b \neq 0 \text{)}$$

Exemples.

$(5 \times 3)^2 = 5^2 \times 3^2 = 25 \times 9 = 225$	$(4x)^2 = 4^2 \times x^2 = 16x^2$	$(-2x)^3 = (-2)^3 \times x^3 = -8x^3$
$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$	$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$	$\left(\frac{2}{x}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$