Devoir surveillé de mathématiques n°3

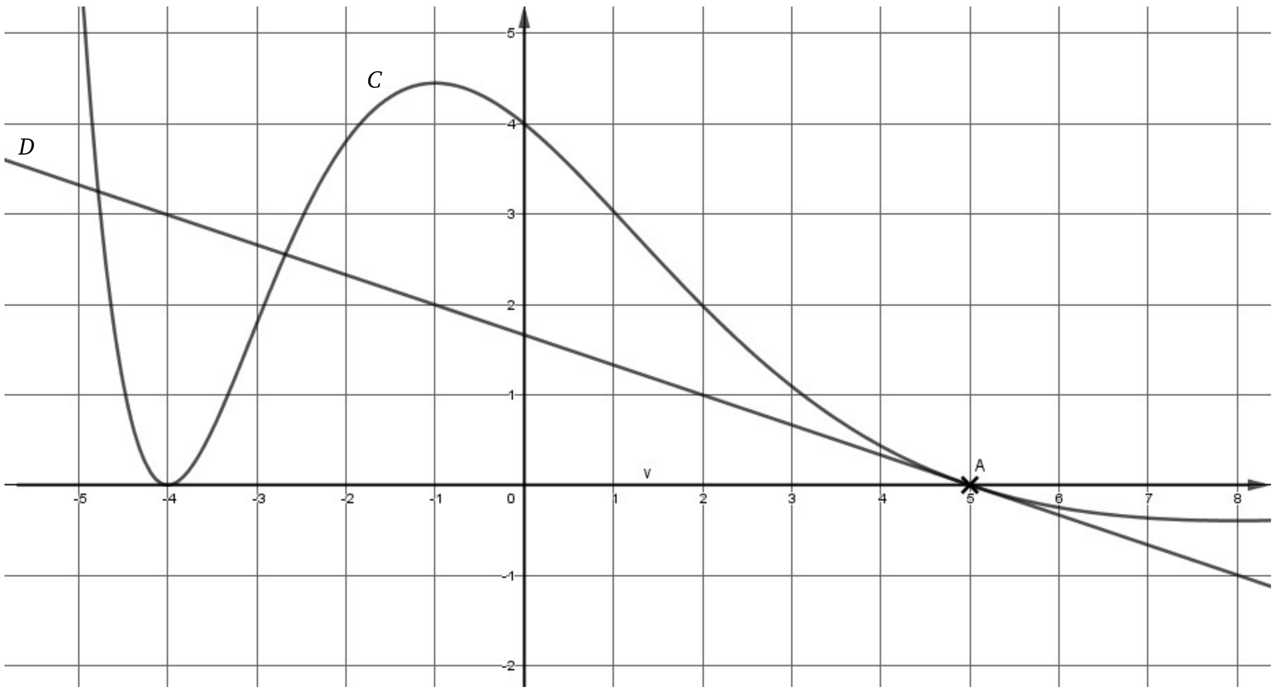
La calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 2 exercices sur 3 pages. Le rendre avec la copie.

Exercice 1 (10 points)

Cet exercice est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier clairement sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 2 points. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On se place dans un repère orthonormé du plan. Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite D est tangente à la courbe C au point A(5 ; 0).



Le nombre dérivé $f'(5)$ est égal à :

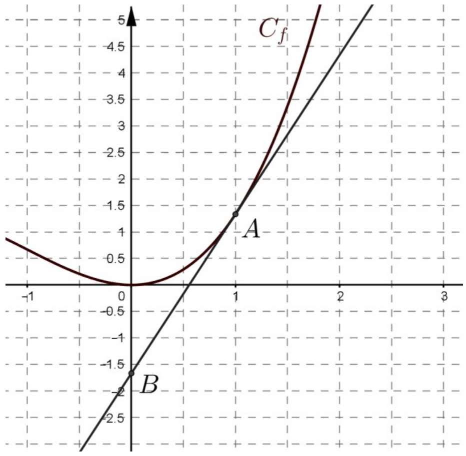
a) 3

b) – 3

c) $\frac{1}{3}$

d) $-\frac{1}{3}$

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f dans un repère est la courbe ci-contre. La courbe C_f admet une tangente au point A $\left(1\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ qui passe par le point B $\left(0\ ;\ -\frac{5}{3}\right)$.



Alors :

a) $f'(1) = \frac{1}{3}$ b) $f'(1) = \frac{4}{3}$

c) $f'(1) = -\frac{5}{3}$ d) $f'(1) = 3$

3. Soit f une fonction telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$. Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation :

a) $y = -x - 3$ b) $y = -x + 3$

c) $y = -x + 7$ d) $y = 5x - 11$

4. Une urne contient 150 jetons rouges et 50 jetons bleus, tous indiscernables au toucher. 20 % des jetons rouges sont gagnants et 40 % des jetons bleus sont gagnants. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne. La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est :

a) 0,2 b) 0,45

c) 0,15 d) 0,95

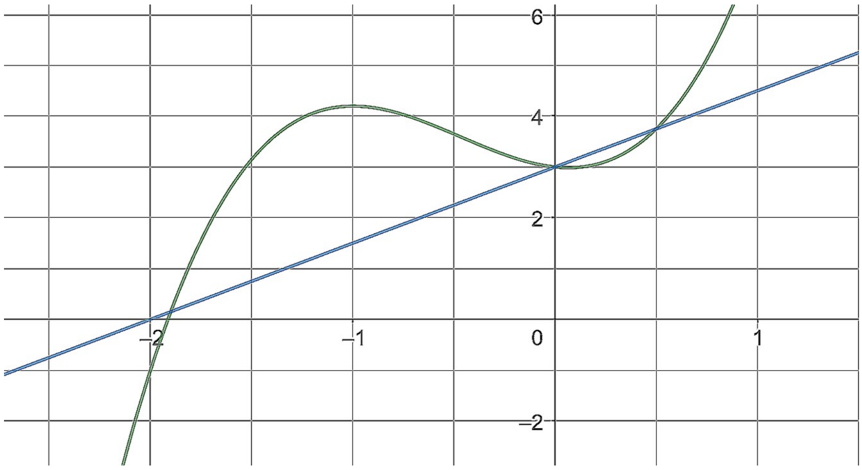
5. Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solution(s) :

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$

c) $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

Exercice 2 (10 points)

On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3$ et la droite d d'équation $y = 1{,}5x + 3$.



L 'objectif de cet exercice est de calculer les coordonnées exactes des points d'intersection de la courbe et de la droite d.

Partie A : conjecture

D'après le graphique, combien de points d'intersection la courbe et la droite d semblent-elles avoir et quelles semblent être leurs coordonnées approximatives ?

Partie B : un polynôme du second degré

On note p le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2x^2 + 2{,}8x - 1{,}9$.

1. Montrer que 0,5 est une racine de p.
2. a. Calculer la somme des racines de p.
   b. En déduire la seconde racine de p.

Partie C : solution du problème

On rappelle que les abscisses des points d'intersection de la droite d et de la courbe C_f sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3 = 1{,}5x + 3$$

1. Prouver que cette équation est équivalente à l'équation produit suivante :

$$x \times p(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation produit $x \times p(x) = 0$.
3. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la droite d et de la courbe C_f .

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1

1) d **2)** d **3)** c **4)** c **5)** d

1. $f'(5)$ est la pente de la tangente à la courbe en A(5 ; 0) donc, en utilisant le quadrillage, cette pente semble égale au rapport de – 1 en ordonnée pour 3 en abscisse, soit :

$$f'(5) = -\frac{1}{3}.$$

2. $f'(1)$ est la pente de la tangente (AB) à la courbe C_f en 1. On a donc :

$$f'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\frac{4}{3} - \left(\frac{-5}{3}\right)}{1-0} = 3.$$

3. L'équation de la tangente est donnée, d'après un théorème du cours, par :

$$y = f'(2)\ (x-2) + f(2)$$

Cela donne, avec les données de l'énoncé :

$$y = -1 \times (x-2) + 5$$

soit après réduction :

$$y = -x + 7.$$

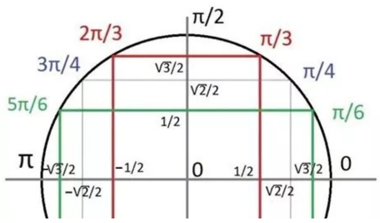
4. On note G : « Le jeton est rouge » et G : « Le jeton est gagnant ».

$$p(R \cap G) = p_R(G) \times p(R) = 20\ \% \times \frac{150}{200} = 0{,}15$$

La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est 0,15.

5. Sur le cercle trigonométrique, le sinus d'un angle se lit sur l'axe des ordonnées, donc sur l'intervalle]–π ; π], l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions :

$$\frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{6}$$



Exercice 2

Partie A

La courbe et la droite semblent avoir trois points d'intersection (il y en a peut-être en dehors de la fenêtre graphique) dont les coordonnées semblent être environ (−1,9 ; 0,2), (0 ; 3) et (0,5 ; 3,7).

Partie B

1. $p(0{,}5) = 2\times0{,}5^2 + 2{,}8\times0{,}5 - 1{,}9 = 0{,}5 + 1{,}4 - 1{,}9 = 0$

Donc 0,5 est une racine de p.

2. a. La somme S des racines du polynôme p est, d'après un théorème du cours :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{2{,}8}{2} = -1{,}4$$

Donc la somme des racines de p est –1,4.

b. D'après ce qui précède, en notant x_2 la seconde racine de p, on obtient :

$$0{,}5 + x_2 = -1{,}4$$

et ainsi :

$$x_2 = -1{,}9$$

La seconde racine de p est –1,9.

Partie C

1.
$$\begin{aligned}
& 2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3 = 1{,}5x + 3 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3 - 1{,}5x - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x^3 + 2{,}8x^2 - 1{,}9x = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x\,(2x^2 + 2{,}8x - 1{,}9) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x \times p(x) = 0
\end{aligned}$$

2. $x \times p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $p(x) = 0$.

L'équation produit admet donc trois solutions : 0 et les deux racines du polynôme p (c'est-à-dire –1,9 et 0,5).

On obtient en tout trois solutions : –1,9, 0 et 0,5.

3. D'après les questions 1 et 2 de la partie C, l'équation $2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3 = 1{,}5x + 3$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ donc il existe trois points d'intersection entre la droite d et la courbe C_f et leurs abscisses sont ces trois solutions : –1,9, 0 et 0,5.

Pour calculer leurs ordonnées, on utilise l'équation de la droite d : $y = 1{,}5x + 3$ (les calculs donnent les mêmes résultats mais sont plus simples qu'en utilisant la fonction f) :

$$1{,}5\times(-1{,}9) + 3 = 0{,}15$$

$$1{,}5\times0 + 3 = 3$$

$$1{,}5\times0{,}5 + 3 = 3{,}75.$$

En conclusion, les coordonnées exactes des points d'intersection entre la droite d et la courbe C_f sont :

$$(-1{,}9\ ;\ 0{,}15),\ (0\ ;\ 3) \text{ et } (0{,}5\ ;\ 3{,}75).$$