Nom et prénom : _____ Spécialité mathématiques 1re

Devoir surveillé de mathématiques n°3

La calculatrice est autorisée. La sujet sera rendu avec la copie.

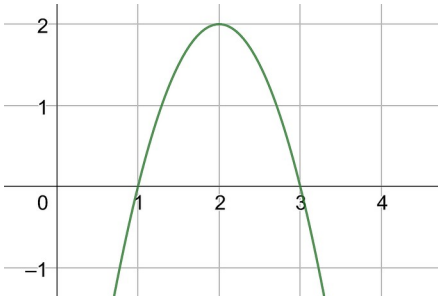
Exercice 1 (9 points)

Cet exercice est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier clairement sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$. On note S la somme des racines de cette équation et P leur produit. Laquelle des affirmations suivantes est vraie :

a) S = 2 et P = –8 b) S = –2 et P = –8 c) S = –2 et P = 8 d) S = 2 et P = 8

2. On considère une fonction f polynôme de degré 2 dont une représentation graphique est donnée ci-contre dans un repère orthonormé. Par lecture graphique, on peut affirmer que la forme factorisée de f est :



a) $-2(x+1)(x+3)$ b) $-2(x-1)(x-3)$

c) $2(x-1)(x-3)$ d) $2(x+1)(x+3)$

3. Le tableau de signes de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 9$ est :

a)

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

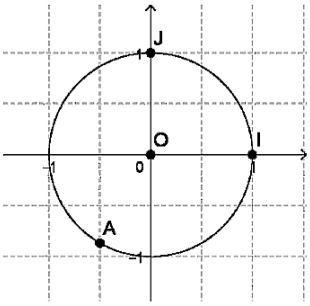
c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

d)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		–	

4. Dans un repère orthonormal (O, I, J), le point A du quadrillage, placé ci-contre sur le cercle trigonométrique de centre O, est associé au réel :



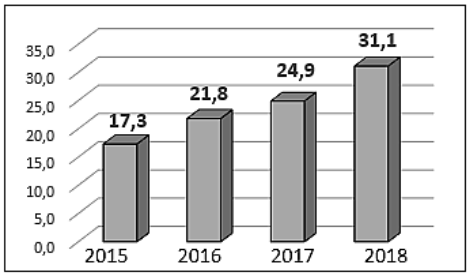
a. $\frac{11\pi}{6}$ b. $\frac{2\pi}{3}$ c. $-\frac{2\pi}{3}$ d. $-\frac{3\pi}{4}$

5. Sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solution(s) :

a. $\frac{\pi}{6}$ b. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$ c. $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ d. $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

Exercice 2 (9 points)

Le graphique ci-contre illustre l'évolution du nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France entre 2015 et 2018.



On cherche à modéliser l'évolution du nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France à compter de l'année 2015 à l'aide d'une suite. On hésite entre deux modèles.

Les résultats seront données sous forme décimale, arrondis au dixième.

Partie A

On fait l'hypothèse que le nombre de voitures augmente en moyenne de 21 % par an. On définit alors la suite (u_n) où u_n est le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France l'année $2015 + n$ (n entier naturel). On a donc : $u_0 = 17{,}3$.

1. Montrer par un calcul que $u_1 \approx 20{,}9$ puis calculer u_2 et u_3.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . *Aucune justification demandée.*
3. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation de la suite u.

Partie B

On définit la suite (v_n) par $v_n = 17{,}3 + 4n$ pour tout entier naturel n (on a donc $v_0 = 17{,}3$). D'après ce modèle, v_n est le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France l'année $2015 + n$.

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3.
2. Étudier le sens de variation de la suite v.

Partie C

Le tableau suivant donnent, pour chaque modèle, les écarts en fonction de n, en valeur absolue, par rapport aux données du graphique.

Par exemple, l'année 1 (2016), le modèle de la partie A présente un écart d'environ $21{,}8 - 20{,}9 = 0{,}9$.

n	**1**	**2**	**3**
Écarts avec le modèle de la partie A	0,9	0,4	0,5
Écarts avec le modèle de la partie B	0,5	0,4	1,8

1. Calculer, pour chaque modèle, la moyenne des trois écarts.
2. Si on prend cette moyenne des écarts comme critère, expliquer quel est le modèle qui apparaît le plus adapté à la modélisation recherchée ?

Exercice 3 (2 points)

En utilisant la définition du sinus d'un angle sur le cercle trigonométrique, démontrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1

1. D'après le théorème du cours, S $= -\dfrac{2}{1} = -2$ et P $= \dfrac{-8}{1} = -8$.

2. Le graphique donne $f(1) \approx 0$, $f(2) \approx 2$ et $f(3) \approx 0$. Seule l'expression $-2\,(x-1)(x-3)$ vérifie les trois approximations. En effet :

$$-2\,(1-1)(1-3) = -2 \times 0 \times (-2) = 0$$

$$-2\,(2-1)(2-3) = -2 \times 1 \times (-1) = 2$$

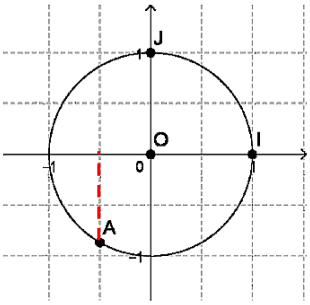
$$-2\,(3-1)(3-3) = -2 \times 2 \times 0 = 0$$

3. $f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ donc $f(x) > 0$ sur IR sauf en -3 où elle s'annule, d'où le tableau de signes :

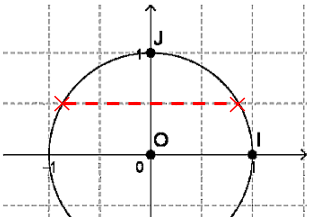
x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

On pouvait travailler par élimination puisque $f(-3) = 0$ élimine c et d et $f(3) \neq 0$ élimine a.

4. L 'abscisse du point du quadrillage recherché est $-\dfrac{1}{2}$. Or, l 'abscisse correspond au cosinus et on sait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc le point A est associé à un multiple de $\dfrac{\pi}{3}$. Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient $-\dfrac{2\pi}{3}$.



5. Le sinus d'un réel correspond à l'ordonnée du point associés. On recherche les points du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $\dfrac{1}{2}$. Il y en a deux. On sait que $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ ce qui fourni la première solution. L 'autre solution est donc un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$ (partage du demi-cercle en 6). Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient $\dfrac{5\pi}{6}$. Ces deux solutions sont toutes deux dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ donc, dans cet intervalle, l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ a pour solutions : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.



Exercice 2

Partie A

1. L 'augmentation de 21 % s'écrit :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + 21\ \%\ u_0 \\ &= (1 + 21\%)\ u_0 \\ &= 1{,}21\ u_0 \\ &= 1{,}21 \times 17{,}3 \\ &= 20{,}933 \\ &\approx 20{,}9 \end{aligned}$$

Le symbole % est l'abréviation de centième (÷100)
5 % = 0,05
0,152 = 15,2 %

De la même façon, la calculatrice donne :

$$u_2 = 1{,}21\ u_1 \approx 25{,}3$$

$$u_3 = 1{,}21\ u_2 \approx 30{,}6$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 21\ \%\ u_n \\ &= (1 + 21\%)\ u_n \\ &= 1{,}21\ u_n \end{aligned}$$

3. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. D'après la question 2 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1{,}21$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc $u_{n+1} > u_n$.

On a montré que la suite u est strictement croissante.

Partie B

1. $v_1 = 17{,}3 + 4 \times 1 = 21{,}3$

$v_2 = 17{,}3 + 4 \times 2 = 25{,}3$

$v_3 = 17{,}3 + 4 \times 3 = 29{,}3$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (17{,}3 + 4(n+1)) - (17{,}3 + 4n) \\ &= (17{,}3 + 4n + 4) - (17{,}3 + 4n) \\ &= 4 \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc $v_{n+1} > v_n$.

On vient de montrer que la suite v est strictement croissante.

Partie C

1. $\dfrac{0,9+0,4+0,5}{3}=0,6$

La moyenne des trois écarts pour le modèle de la partie A est 0,6.

$\dfrac{0,5+0,4+1,8}{3}=0,9$

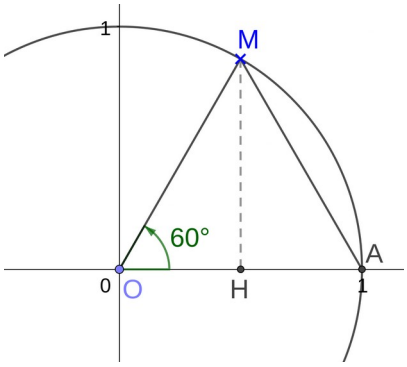
La moyenne des trois écarts pour le modèle de la partie B est 0,9.

2. Si on prend cette moyenne des écarts comme critère, le modèle présentant la plus petite moyenne est le modèle A (0,6 < 0,9) donc, selon ce critère, il apparaît le plus adapté à la modélisation recherchée.

Exercice 3

On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à $\frac{\pi}{3}$: on a donc $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$ (60°).

On note H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OAM : l'ordonnée du point M est donc égale à HM.



Le triangle OAM est isocèle en O et comme il possède un angle de 60°, il est en plus équilatéral.

Il s'ensuit que H est le milieu de [OA] ce qui donne : OH = $\frac{1}{2}$.

En appliquant alors le théorème de Pythagore au triangle OMH, on obtient :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

$$\frac{1}{4} + HM^2 = 1$$

$$HM^2 = \frac{3}{4}$$

et comme HM > 0, il y a une unique solution : HM = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par définition, le sinus de l'angle $\widehat{AOM}$ est l'ordonnée du point M : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_M = HM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a ainsi démontré que : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.