Spécialité mathématiques 1re

Groupe 3 (M Davin)

2e trimestre

Devoir surveillé de mathématiques n°4

La calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 4 exercices sur 4 pages. Il sera rendu avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

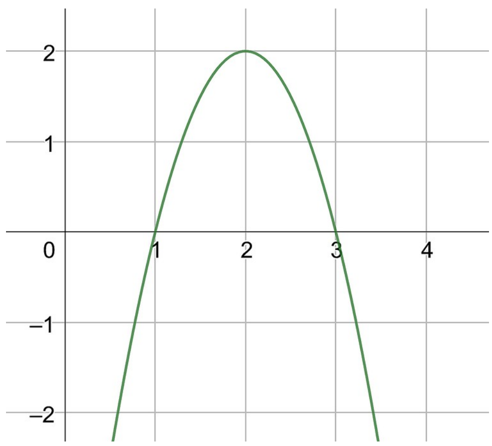
Ce QCM comprend 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$. On note S la somme des racines de cette équation et P leur produit. Laquelle des affirmations suivantes est vraie :

a) $S = 2$ et $P = -8$ b) $S = -2$ et $P = -8$

c) $S = -2$ et $P = 8$ d) $S = 2$ et $P = 8$

2. On considère une fonction f polynôme de degré 2 dont une représentation graphique est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.



Par lecture graphique, on peut affirmer qu'une forme factorisée de f est :

a) $-2(x + 1)(x + 3)$ b) $2(x - 1)(x - 3)$

c) $-2(x - 1)(x - 3)$ d) $2(x + 1)(x + 3)$

3. Le tableau de signes de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 9$ est :

a)

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

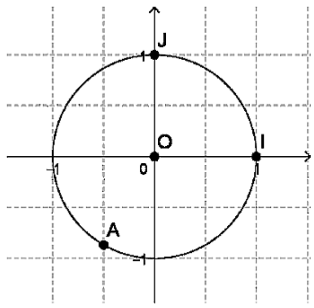
c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

d)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

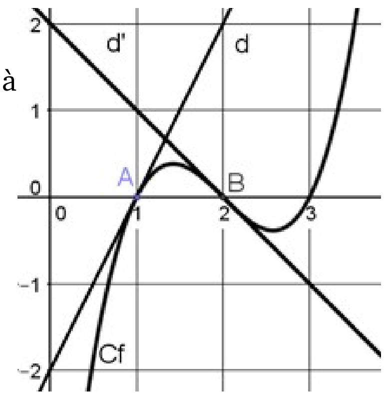
4. Dans un repère orthonormal (O, I, J), le point A, placé ci-contre sur le cercle trigonométrique de centre O, est associé au réel :



a) $\dfrac{11\pi}{6}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$

c) $-\dfrac{2\pi}{3}$ d) $-\dfrac{3\pi}{4}$

5. La courbe ci-contre Cf est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f. Les droites d et d' sont respectivement les tangentes à la courbe Cf aux points d'abscisses 1 et 2.



Les équations réduites de d et d' sont respectivement :

$$\text{d} : y = 2x - 2 \text{ et d'} : y = -x + 2.$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

a) $f'(1) = 0$ b) $f'(2) = -1$

c) $f'(2) = 2$ d) $f'(1) = -2$

Exercice 2 (5 points)

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier la première semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la deuxième semaine est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier la première semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la deuxième semaine est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur.

On note R_1 l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier la première semaine » et R_2 l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier la deuxième semaine ».

1. Écrire les trois probabilités correspondantes aux données de l'énoncé.

2. Déterminer la probabilité que le client ne rapporte pas la bouteille de son panier de la deuxième semaine sachant qu'il a rapporté la bouteille de son panier la première semaine.

3. Construire l'arbre pondéré de probabilité modélisant cette situation.

4. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

5. On admet que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite a définie par $a_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$.

On définit alors la suite b sur $\mathbb{N}$ par $b_n = a_n - n^2$.

1. a. Vérifier que $a_1 = 2$ puis calculer a_2.

   b. La suite a est-elle arithmétique ? Justifier.

2. a. Vérifier que $b_0 = 3$ et calculer b_1 et b_2.

   b. Montrer que la suite b est arithmétique de raison –2.

   c. En déduire une expression de b_n en fonction de n.

   d. Calculer $b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}$.

3. a. Déduire de ce qui précède une expression de a_n en fonction de n. Vérifier que $a_{100} = 9\,803$.

   b. Calculer $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ en sachant que, pour tout entier naturel n non nul, la somme des n premiers carrés vérifie :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$.

On note C_f sa courbe représentative (voir ci-dessous).

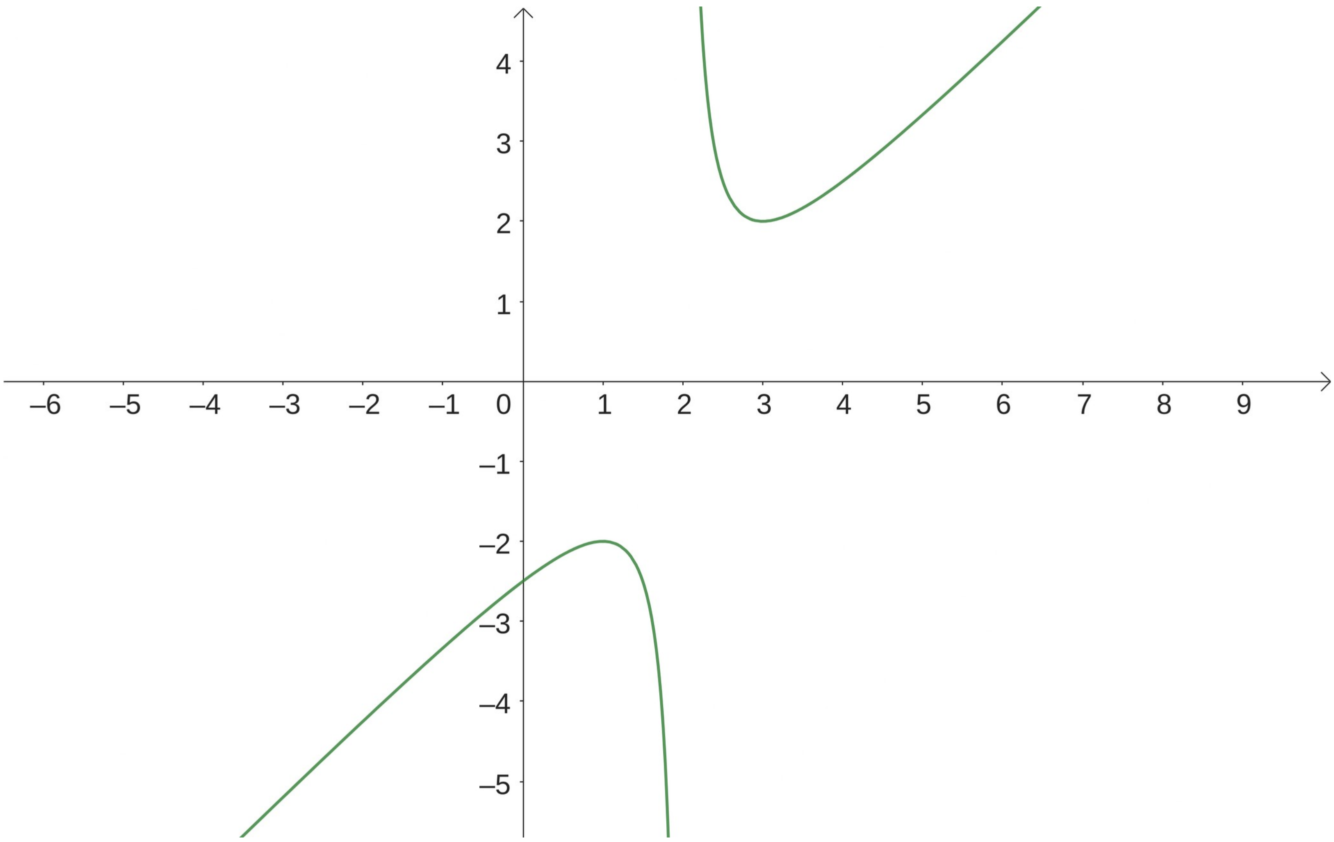
1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0. Tracer cette droite sur le graphique ci-dessous.

3 a. Montrer que 1 est une solution de l'équation $f'(x) = 0$.

b. En déduire, dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

c. Graphiquement, que peut-on en déduire pour C_f ? Illustrer ce résultat sur le graphique.



Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1 (5 points)

Réponses : 1. b) 2. c) 3. b) 4. c) 5. b)

1. S = –2 et P = –8 d'après un théorème du cours.

2. Par lecture graphique, on a $f(1) = 0$, $f(3) = 0$ donc $f(x)$ est de la forme $a(x-1)(x-3)$ avec a réel. Comme $f(2) = 2$, cela donne $a(2-1)(2-3) = 2$ soit $-a = 2$ et ainsi $a = -2$. En conclusion : $f(x) = -2(x-1)(x-3)$.

3.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

car $f(x) = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 > 0$ sauf pour $x = -3$.

4. Le point A est associé à $-\dfrac{2\pi}{3}$.

5. Les équations des tangentes donnent directement les coefficients directeurs de ces tangentes en $x = 1$ et $x = 2$: $f'(1) = 2$ et $f'(2) = -1$.

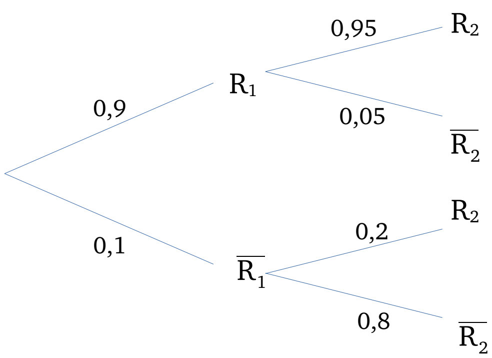
Exercice 2 (5 points)

1. $p(R_1) = 0{,}9$, $p_{R_1}(R_2) = 0{,}95$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0{,}2$.

2. $p_{R_1}(\overline{R_2}) = 1 - p_{R_1}(R_2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

La probabilité que le client ne rapporte pas la bouteille de son panier de la deuxième semaine sachant qu'il a rapporté la bouteille de son panier la première semaine est 0,05.

3. On utilise la règle de la somme pour compléter l'arbre.



4. $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0{,}9 \times 0{,}95 = 0{,}855$

La probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine est 0,855.

5. $p_{R_2}(\overline{R_1}) = \dfrac{p(\overline{R_1} \cap R_2)}{p(R_2)} = \dfrac{p(\overline{R_1}) \times p_{\overline{R_1}}(R_2)}{p(R_2)} = \dfrac{0,1 \times 0,2}{0,875} \approx 0,023$

La probabilité que le client n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine sachant qu'il a a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine est environ 0,023 (arrondie à 10^{-3}).

Exercice 3 (5 points)

1. a. Pour $n = 0$, on a $a_{0+1} = a_0 + 2\times 0 - 1$ donc $a_1 = 3 + 0 - 1 = 2$.

Maintenant, pour $n = 1$, on a $a_{1+1} = a_1 + 2\times 1 - 1$ donc $a_2 = 2 + 2 - 1 = 3$.

En résumé :

$$a_0 = 3,\ a_1 = 2 \text{ et } a_2 = 3.$$

b. $a_1 - a_0 = 2 - 3 = -1$ et $a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$ donc la suite a n'est pas arithmétique.

2. a. En utilisant les résultats de la question 1. a, pour $n = 0$, on a $b_0 = a_0 - 0^2 = 3 - 0 = 3$.

D'autre part, pour $n = 1$, $b_1 = a_1 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ et pour $n = 2$, $b_2 = a_2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$.

En résumé :

$$b_0 = 3,\ b_1 = 1 \text{ et } b_2 = -1.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $b_{n+1} - b_n$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= [(a_{n+1} - (n+1)^2] - (a_n - n^2) \\ &= [a_n + 2n - 1 - (n^2 + 2n + 1)] - (a_n - n^2) \\ &= [a_n + 2n - 1 - n^2 - 2n - 1] - (a_n - n^2) \\ &= (a_n - n^2 - 2) - (a_n - n^2) \\ &= a_n - n^2 - 2 - a_n + n^2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Donc la suite b est arithmétique de raison -2.

c. D'après un théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_n = b_0 - 2n$ soit :

$$b_n = 3 - 2n.$$

d. La question 2. c permet d'écrire $b_{100} = 3 - 2\times 100 = -197$ et la suite b étant arithmétique, on a, d'après un théorème :

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = \frac{(b_1 + b_{100})\times 100}{2} = (1 - 197)\times 50 = -9\,800$$

donc :

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = -9\,800$$

3. a. D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - n^2$ donc $a_n = b_n + n^2$. Mais, d'après la question 2. c, $b_n = 3 - 2n$ ce qui donne $a_n = 3 - 2n + n^2$ soit :

$$a_n = n^2 - 2n + 3$$

En particulier, pour $n = 100$, on obtient $a_{100} = 100^2 - 2\times 100 + 3 = 10\,000 - 200 + 3 = 9803$.

b. On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n + n^2$ donc :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} &= (b_1 + 1^2) + (b_2 + 2^2) + \ldots + (b_{100} + 100^2) \\ &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} + 1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 \end{aligned}$$

Maintenant, pour n non nul, la somme des n premiers carrés vérifie $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 = \frac{100\times 101\times 201}{6} = 338\,350$$

Mais d'après la question 2. c., on a :

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = -9\,800$$

On obtient :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = -9\,800 + 338\,350 = 328\,550$$

En conclusion :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 328\,550$$

Exercice 4 (5 points)

1. La fonction f est un quotient de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout réel $x \neq 2$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)-(x^2-4x+5)\times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

2. Par le calcul, d'une part $f(0) = -\frac{5}{2} = -2{,}5$ et d'autre part, $f'(0) = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$. On obtient donc :

$$(\text{T}) : y = 0{,}75\,x - 2{,}5$$

3 a. $f'(1) = \frac{1^2 - 4 \times 1 + 3}{(1-2)^2} = \frac{0}{(-1)^2} = 0$ donc 1 est une solution de l'équation $f'(x) = 0$.

b. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul. Donc :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré dont 1 est une racine (voir 3. a.) et dont le produit P de ses racines vaut $\text{P} = \frac{3}{1} = 3$. On en déduit que 3 est la seconde racine du polynôme $x^2 - 4x + 3$.

En conclusion, les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont 1 et 3.

c. Graphiquement, le nombre dérivé $f'(a)$ est égal à la pente de la tangente à la courbe C_f en $x = a$.

$f'(1) = 0$ donc la pente de la tangente à la courbe C_f en $x = 1$ est nulle : la courbe C_f admet en $x = 1$ une tangente horizontale. De même, la courbe C_f admet en $x = 3$ une tangente horizontale.

En conclusion, la courbe C_f admet deux tangentes horizontale : l'une en $x = 1$ et l'autre en $x = 3$.