M. Davin

Devoir surveillé de mathématiques n°4

La calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 4 exercices sur 4 pages. Il sera rendu avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier la première semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la deuxième semaine est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier la première semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la deuxième semaine est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur.

On note R_1 l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier la première semaine » et R_2 l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier la deuxième semaine ».

1. Écrire les trois probabilités correspondantes aux données de l'énoncé.

2. Déterminer la probabilité que le client ne rapporte pas la bouteille de son panier la deuxième semaine sachant qu'il a rapporté la bouteille de son panier la première semaine.

3. Construire l'arbre pondéré de probabilité modélisant cette situation.

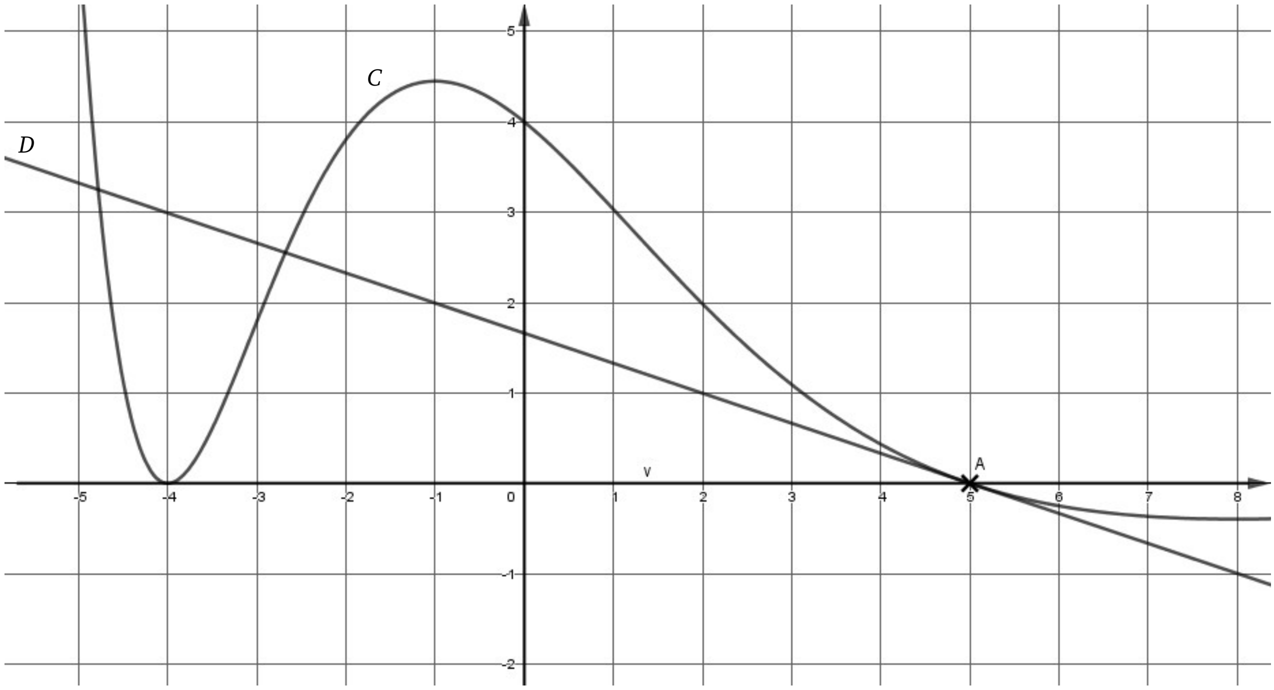
4. Déterminer la probabilité que le client rapporte les bouteilles de ses paniers la première et la deuxième semaine.

5. On admet que la probabilité que le client rapporte la bouteille de son panier la deuxième semaine est égale à 0,875. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Exercice 2 (5 points)

Ce QCM comprend 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

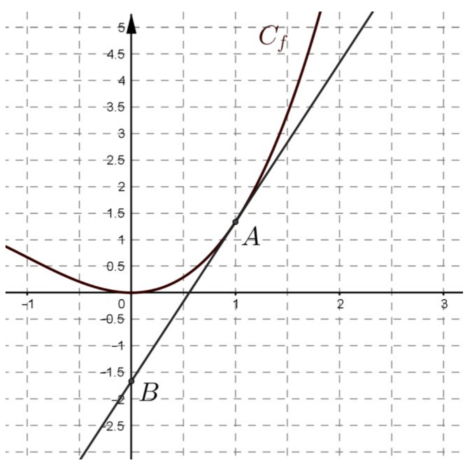
1. On se place dans un repère orthonormé du plan. Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée C d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite D est tangente à la courbe C au point A(5 ; 0).



Le nombre dérivé $f'(5)$ est égal à :

a) 3 b) – 3 c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f dans un repère est la courbe ci-contre. La courbe C_f admet une tangente au point A $\left(1\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ qui passe par le point B $\left(0\ ;\ -\frac{5}{3}\right)$.



Alors :

a) $f'(1) = \frac{1}{3}$ b) $f'(1) = \frac{4}{3}$

c) $f'(1) = -\frac{5}{3}$ d) $f'(1) = 3$

3. Soit f une fonction telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$. Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation :

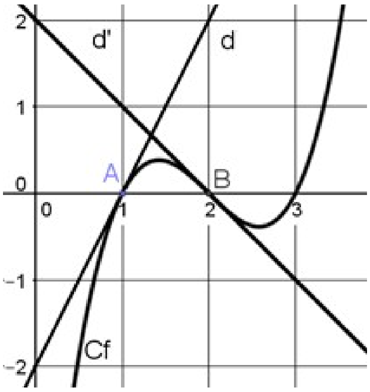
a) $y = -x - 3$ b) $y = -x + 3$

c) $y = -x + 7$ d) $y = 5x - 11$

4. Une urne contient 150 jetons rouges et 50 jetons bleus, tous indiscernables au toucher. 20 % des jetons rouges sont gagnants et 40 % des jetons bleus sont gagnants. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne. La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est :

a) 0,2 b) 0,45 c) 0,15 d) 0,95

5. La courbe ci-contre Cf est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f. Les droites d et d' sont respectivement les tangentes à la courbe Cf aux points d'abscisses 1 et 2.



Les équations réduites de d et d' sont respectivement :

$$d : y = 2x - 2 \text{ et } d' : y = -x + 2.$$

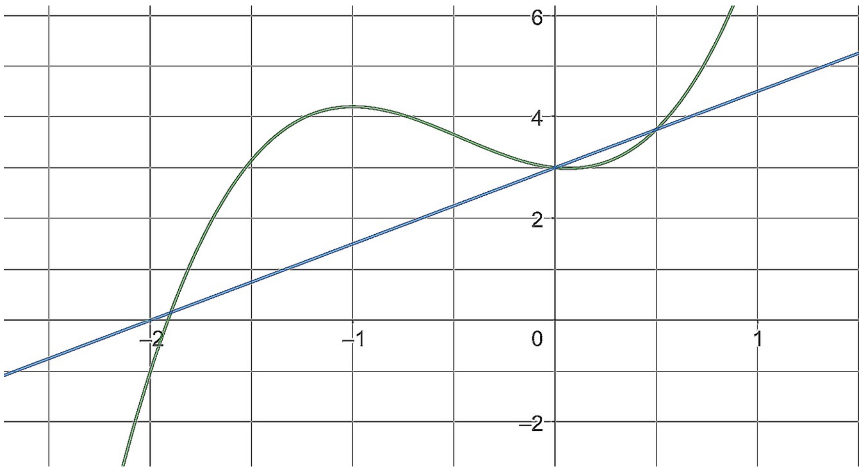
Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

a) $f'(1) = 0$ b) $f'(2) = -1$

c) $f'(2) = 2$ d) $f'(1) = -2$

Exercice 3 (5 points)

On considère la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3$ et la droite d d'équation $y = 1{,}5x + 3$.



L'objectif de cet exercice est de calculer les coordonnées exactes des points d'intersection de la courbe et de la droite d.

Partie A : conjecture

D'après le graphique, combien de points d'intersection la courbe et la droite d semblent-elles avoir et quelles semblent être leurs coordonnées approximatives ?

Partie B : un polynôme du second degré

On note p le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2x^2 + 2{,}8x - 1{,}9$.

1. Montrer que 0,5 est une racine de p.
2. a. Calculer la somme des racines de p.

   b. En déduire la seconde racine de p.

Partie C : solution du problème

On rappelle que les abscisses des points d'intersection de la droite d et de la courbe C_f sont les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2x^3 + 2{,}8x^2 - 0{,}4x + 3 = 1{,}5x + 3$$

1. Prouver que cette équation est équivalente à l'équation produit suivante :

$$x \times p(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation produit $x \times p(x) = 0$.
3. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la droite d et de la courbe C_f .

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite a définie par $a_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$.

L 'objectif principal de cet exercice est de trouver une expression de a_n en fonction de n.

1. a. Vérifier que $a_1 = 2$ puis calculer a_2.

   b. La suite a est-elle arithmétique ? Justifier.

2. On définit alors la suite b sur $\mathbb{N}$ par $b_n = a_n - n^2$.

   a. Vérifier que $b_0 = 3$ et calculer b_1 et b_2.

   b. Montrer que la suite b est arithmétique de raison –2.

   c. En déduire une expression de b_n en fonction de n.

   d. Calculer $b_1 + b_2 + \dots + b_{100}$.

3. a. Déduire de ce qui précède une expression de a_n en fonction de n. Vérifier que $a_{100} = 9\,803$.

   b. Pour tout entier naturel n non nul, la somme des n premiers carrés vérifie :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   Calculer $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$.

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°4

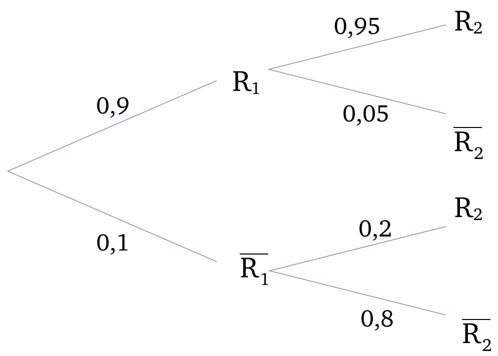
Exercice 1 (5 points)

1. $p(R_1) = 0{,}9$, $p_{R_1}(R_2) = 0{,}95$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0{,}2$.

2. $p_{R_1}(\overline{R_2}) = 1 - p_{R_1}(R_2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

La probabilité que le client ne rapporte pas la bouteille de son panier de la deuxième semaine sachant qu'il a rapporté la bouteille de son panier la première semaine est 0,05.

3. On utilise la règle de la somme pour compléter l'arbre.



4. $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0{,}9 \times 0{,}95 = 0{,}855$

La probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine est 0,855.

5. $p_{R_2}(\overline{R_1}) = \dfrac{p(\overline{R_1} \cap R_2)}{p(R_2)} = \dfrac{p(\overline{R_1}) \times p_{\overline{R_1}}(R_2)}{p(R_2)} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}875} \approx 0{,}023$

La probabilité que le client n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine sachant qu'il a a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine est environ 0,023 (arrondie à 10^{-3}).

Exercice 2 (5 points)

1. d. $f'(5)$ est la pente de la tangente à la courbe en A(5 ; 0). En utilisant le quadrillage, cette pente est approximativement égale au rapport de – 1 en ordonnée pour 3 en abscisse. On en déduit la réponse :

$$f'(5) = -\frac{1}{3}.$$

2. d. $f'(1)$ est la pente de la tangente (AB) à la courbe C_f en 1. On a donc :

$$f'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\frac{4}{3} - \left(\frac{-5}{3}\right)}{1-0} = 3.$$

On pouvait procéder efficacement par élimination car la pente est positive et clairement supérieure à 2.

3. c. L 'équation de la tangente est donnée, d'après un théorème du cours, par :

$$y = f'(2)\ (x-2) + f(2)$$

Cela donne, avec les données de l'énoncé :

$$y = -1 \times (x-2) + 5$$

soit après réduction :

$$y = -x + 7.$$

4. c. On note G : « Le jeton est rouge » et G : « Le jeton est gagnant ».

$$p(\mathrm{R} \cap \mathrm{G}) = p_R(\mathrm{G}) \times p(\mathrm{R}) = 20\ \% \times \frac{150}{200} = 0{,}15$$

La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est 0,15.

5. b. Les équations des tangentes donnent directement les coefficients directeurs de ces tangentes en $x = 1$ et $x = 2$: $f\,'(1) = 2$ et $f\,'(2) = -1$.

Exercice 3 (5 points)

Partie A

La courbe et la droite semblent avoir trois points d'intersection (il y en a peut-être en dehors de la fenêtre graphique) dont les coordonnées semblent être environ $(-1{,}9\ ;\ 0{,}2)$, $(0\ ;\ 3)$ et $(0{,}5\ ;\ 3{,}7)$.

Partie B

1. $p(0{,}5) = 2 \times 0{,}5^2 + 2{,}8 \times 0{,}5 - 1{,}9 = 0{,}5 + 1{,}4 - 1{,}9 = 0$

Donc 0,5 est une racine de p.

2. a. La somme S des racines du polynôme p est, d'après un théorème du cours :

$$\mathrm{S} = -\frac{b}{a} = -\frac{2{,}8}{2} = -1{,}4$$

Donc la somme des racines de p est –1,4.

b. D'après ce qui précède, en notant x_2 la seconde racine de p, on obtient :

$$0{,}5 + x_2 = -1{,}4$$

et ainsi :

$$x_2 = -1,9$$

On vérifier avec la calculatrice : $p(-1,9) = 2\times(-1,9)^2 + 2,8\times(-1,9) - 1,9 = 0$.

La seconde racine de p est $-1,9$.

Partie C

1.
$$\begin{aligned} & 2x^3 + 2,8x^2 - 0,4x + 3 = 1,5x + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^3 + 2,8x^2 - 0,4x + 3 - 1,5x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^3 + 2,8x^2 - 1,9x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x\,(2x^2 + 2,8x - 1,9) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x \times p(x) = 0 \end{aligned}$$

2. $x \times p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $p(x) = 0$.

L 'équation produit admet donc trois solutions : 0 et les deux racines du polynôme p (c'est-à-dire $-1,9$ et $0,5$).

On obtient en tout trois solutions : $-1,9$, 0 et $0,5$.

3. D'après les questions 1 et 2 de la partie C, l'équation $2x^3 + 2,8x^2 - 0,4x + 3 = 1,5x + 3$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$ donc il existe trois points d'intersection entre la droite d et la courbe C_f et leurs abscisses sont ces trois solutions : $-1,9$, 0 et $0,5$.

Pour calculer leurs ordonnées, on utilise l'équation de la droite d : $y = 1,5x + 3$ (les calculs donnent les mêmes résultats qu'en utilisant la fonction f mais ils sont plus simples) :

$$1,5\times(-1,9) + 3 = 0,15$$

$$1,5\times 0 + 3 = 3$$

$$1,5\times 0,5 + 3 = 3,75.$$

En conclusion, les coordonnées exactes des points d'intersection entre la droite d et la courbe C_f sont :

$$(-1,9 ~;~ 0,15),\ (0 ~;~ 3) \text{ et } (0,5 ~;~ 3,75).$$

Exercice 4 (5 points)

1. a. Pour $n = 0$, on a $a_{0+1} = a_0 + 2\times 0 - 1$ donc $a_1 = 3 + 0 - 1 = 2$. On a vérifié que $a_1 = 2$.

Maintenant, pour $n = 1$, on a $a_{1+1} = a_1 + 2\times 1 - 1$ donc $a_2 = 2 + 2 - 1 = 3$. On a donc $a_2 = 3$.

b. D'après l'énoncé et la question 1. a., on a :

$$a_0 = 3,\ a_1 = 2 \text{ et } a_2 = 3.$$

donc $a_1 - a_0 = 2 - 3 = -1$ et $a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$ donc la différence n'est pas constante : la suite a n'est pas arithmétique.

2. a. Pour $n = 0$, on a $b_0 = a_0 - 0^2 = 3 - 0 = 3$.

En prenant $n = 1$, on obtient $b_1 = a_1 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ et avec $n = 2$, cela donne $b_2 = a_2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$.

En résumé :

$$b_0 = 3,\ b_1 = 1 \text{ et } b_2 = -1.$$

b. D'après ce qui précède, la suite b semble arithmétique de raison -2. Démontrons-le.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $b_{n+1} - b_n$.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= [(a_{n+1} - (n+1)^2] - (a_n - n^2) \\
&= [a_n + 2n - 1 - (n^2 + 2n + 1)] - (a_n - n^2) \\
&= [a_n + 2n - 1 - n^2 - 2n - 1] - (a_n - n^2) \\
&= (a_n - n^2 - 2) - (a_n - n^2) \\
&= a_n - n^2 - 2 - a_n + n^2 \\
&= -2
\end{aligned}$$

Donc la suite b est arithmétique de raison -2.

c. D'après un théorème, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_n = b_0 - 2n$ soit :

$$b_n = 3 - 2n.$$

d. La question 2. c permet d'écrire $b_{100} = 3 - 2\times100 = -197$ et la suite b étant arithmétique, on a, d'après un théorème :

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = \frac{(b_1 + b_{100})\times100}{2} = (1 - 197)\times50 = -9\,800$$

donc :

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = -9\,800$$

3. a. D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - n^2$ donc $a_n = b_n + n^2$. Mais, d'après la question 2. c, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3 - 2n$ ce qui donne $a_n = 3 - 2n + n^2$ soit :

$$a_n = n^2 - 2n + 3$$

En particulier, pour $n = 100$, on obtient $a_{100} = 100^2 - 2\times100 + 3 = 10\,000 - 200 + 3 = 9803$.

b. On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n + n^2$ donc :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} &= (b_1 + 1^2) + (b_2 + 2^2) + \ldots + (b_{100} + 100^2) \\ &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} + 1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 \end{aligned}$$

Maintenant, pour n non nul, la somme des n premiers carrés vérifie $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2 = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338\,350$$

Mais d'après la question 2. c., on a :

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = -\,9\,800$$

On obtient :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = -\,9\,800 + 338\,350 = 328\,550$$

En conclusion :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 328\,550$$