Nom Prénom : 2^e trimestre

Devoir surveillé de mathématiques n°5

La calculatrice est autorisée. Ce sujet comporte 2 exercices. ***Il sera rendu avec la copie.***

Exercice 1 (10 points)

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 60% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes

On interroge une personne au hasard. On note C l'événement « la personne interrogée est contre le barrage » et E l'événement « la personne interrogée est écologiste ».

1. Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.

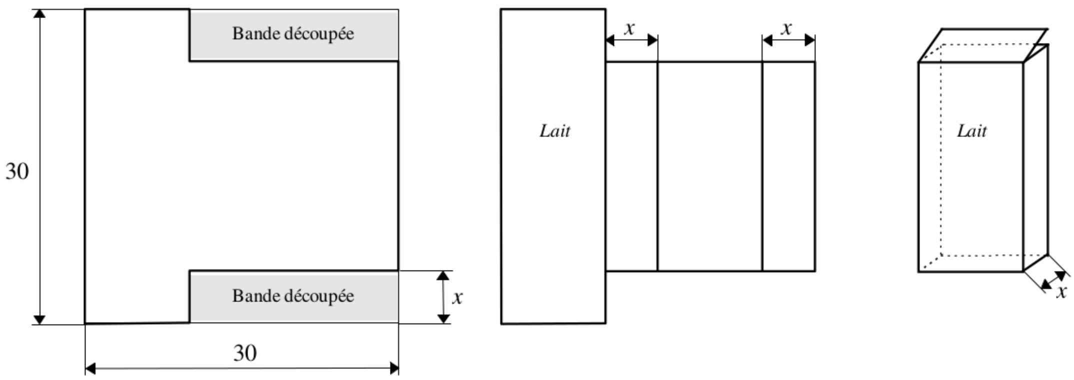
3. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

4. Les événements E et C sont-ils indépendants ?

5. Déterminer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage sachant qu'elle est écologiste.

Exercice 2 (10 points)

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en cm) de la largeur des deux bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

1. Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

2. Calculer la dérivée $V'(x)$.

3. Étudier le signe de la dérivée. *Justifier.*

4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction V.

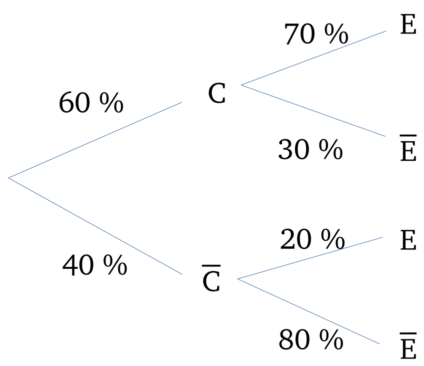
5. Déterminer la contenance maximale, en litres, de la brique et la mesure, en cm, de la largeur des deux bandes découpées nécessaire pour l'obtenir. *Justifier.*

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°5

Exercice 1

1. D'après l'énoncé, on a : $p(\mathrm{C}) = 60\ \%$, $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) = 70\ \%$ et $p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{E}) = 20\ \%$.

Cela donne l'arbre pondéré suivant :



2. D'après un théorème :

$$p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}) = p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) = 70\ \% \times 60\ \% = 42\ \%$$

La probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste est 42 %.

3. D'après la formule des probabilités totales et ce qui précède, on obtient :

$$p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{C}}\cap\mathrm{E}) = p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{C}}) \times p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{E}) = 42\ \% + 40\ \% \times 20\ \% = 50\ \%$$

La probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste est 50 %.

4. $p(\mathrm{E}) = 50\ \%$ et $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) = 70\ \%$ donc $p(\mathrm{E}) \neq p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E})$ donc les événements E et C ne sont pas indépendants.

5. D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{C}) = \frac{p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E})}{p(\mathrm{E})} = \frac{42\ \%}{50\ \%} = 84\ \%$$

La probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage sachant qu'elle est écologiste est 84 %.

Exercice 2

1. Les dimensions L, l et h de la brique, en cm, sont : $L = \dfrac{30-2x}{2} = 15 - x$, $l = x$ et $h = 30 - 2x$.

On peut alors calculer son volume :

$$\begin{aligned} V(x) &= x\,(15 - x)\,(30 - 2x) \\ &= x\,(450 - 60x + 2x^2) \\ &= 2x^3 - 60x^2 + 450x \end{aligned}$$

Le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

2. $V'(x) = 6x^2 - 120x + 450 = 6\,(x^2 - 20x + 75)$

3. La dérivée V ' est un polynôme du second degré. On peut remarquer que $5^2 - 20\times 5 + 75 = 0$. Donc 5 est une racine de V ' et le produit des racines valant 75, on obtient 15 comme seconde racine, celle-ci n'appartenant pas à l'ensemble de définition. (On pouvait aussi utiliser le discriminant bien sûr)

Maintenant, le coefficient de x^2 est 6, il est positif donc $V'(x) > 0$ à l'extérieur des racines 5 et 15. Enfin, comme $0 < x < 15$, $V'(x) > 0$ sur $]\,0\,;\,5\,[$ et $V'(x) < 0$ sur $]\,5\,;\,15\,[$.

4. D'après la question 1, $V(5) = 5\,(15 - 5)\,(30 - 2\times5) = 5 \times 10 \times 20 = 1\,000$.

D'après la question 3 et ce résultat, on peut dresser le tableau de variations de la fonction V sur $]0\,;\,15[$.

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	−	
V		↗	1000	↘	

5. D'après le tableau de variations, V atteint un maximum en 5 et ce maximum est égal à 1000 donc le volume maximum est égal à $1\,000\ cm^3$.

Enfin :

$$1\,000\ cm^3 = 1\ dm^3 = 1\ L$$

En conclusion, la contenance maximale, en litres, de la brique est 1 L et la mesure, en cm, de la largeur des deux bandes découpées nécessaire pour l'obtenir est 5 cm.