Nom : Spécialité mathématiques 1re

Prénom : 3e trimestre

Devoir surveillé de mathématiques n°7

La qualité de la copie comptera pour une part importante de la note.

La calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 4 exercices sur 4 pages. ***Il sera rendu avec la copie.***

Exercice 1 (5 points)

Ce QCM comprend 5 questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. **Pour chaque question, indiquer sur votre copie la lettre correspondante à la réponse choisie.** Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

a) $\dfrac{3}{2x}$ b) $\dfrac{9x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$ c) $\dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$ d) $9x^2+8x+3$

2. ABC est un triangle équilatéral. I et H sont les milieux respectifs de [CB] et de [AB]. D est le projeté orthogonal de I sur (CH). Lequel de ces produits scalaires est nul ?

a) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$ b) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DI}$ c) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$ d) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DI}$

3. Soit la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$.

a) $u_3 = 7$ b) $u_3 = 11$ c) $u_3 = 3$ d) $u_3 = 5$

4. Pour tous réels a et b, le nombre $\dfrac{e^a}{e^{-b}}$ est égal à :

a) e^{a-b} b) $e^{\frac{a}{-b}}$ c) $\dfrac{e^b}{e^{-a}}$ d) $e^a - e^{-b}$

5. Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 8$?

a) $0{,}5x^2 - 2x - 6$ b) $0{,}5(x-6)(x+2)$ c) $0{,}5(x+10)(x-6)$ d) $0{,}5(x-10)(x+6)$

Exercice 2 (5 points)

Durant l'été, une piscine extérieure perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau par évaporation. On étudie ici un bassin qui contient 80 m^3 après son remplissage.

1. Montrer par un calcul détaillé que ce bassin contient 76,8 m^3 d'eau une semaine après son remplissage.

2. On modélise le volume d'eau contenue dans la piscine par une suite (V_n) : pour tout entier naturel n, on note V_n la quantité d'eau en m^3 contenue dans la piscine n semaines après son remplissage. Ainsi $V_0 = 80$.

   a. Exprimer, pour tout entier naturel n, V_{n+1} en fonction de V_n. Justifier.

   b. Quelle est la nature de la suite (V_n) ? En déduire une expression de V_n en fonction de n.

   c. Quelle quantité d'eau contient le bassin au bout de 7 semaines ? Arrondir à 0,1 m^3.

3. On considère la fonction Python suivante.

```
def nombreSemaine(U) :
    N=0
    V=80
    while V >= U :
        N = N+1
        V = 0.96*V
    return N
```

Que va renvoyer l'instruction nombreSemaine(50) ? Interpréter le résultat. *Aucune justification demandée.*

Exercice 3 (5 points)

Des pucerons envahissent une roseraie.

On introduit alors des coccinelles, prédatrices des pucerons, à l'instant $t = 0$, et on s'intéresse à l'évolution du nombre de pucerons à partir de cet instant et sur une période de 20 jours.

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe C_f représentant le nombre de milliers de pucerons en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles et la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0. Elle passe par les points de coordonnées (0 ; 2,1) et (2 ; 4,3).

1. Déterminer par lecture graphique le nombre maximal approximatif de pucerons sur la période de 20 jours.

2. On assimile la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant t au nombre dérivé $f'(t)$. Montrer, à l'aide des indications de l'énoncé, que la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t = 0$ est égale à 1,1.

Partie B

On modélise l'évolution du nombre de pucerons par la fonction f définie, pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 20], par :

$$f(t) = 0{,}003t^3 - 0{,}12t^2 + 1{,}1t + 2{,}1$$

où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles et $f(t)$ le nombre de pucerons en milliers.

1. Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 20]. Vérifier que $f'(20) = -0{,}1$.

2. Étudier, en le justifiant, le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 20] puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20]. *Arrondir les valeurs au centième.*

3. D'après ce modèle, déterminer le nombre maximal de pucerons (à la dizaine près) sur la période de 20 jours ainsi que le jour et l'heure à laquelle il est atteint.

Exercice 4 (5 points)

Dans une école d'ingénieurs, certains étudiants s'occupent de la gestion des associations comme par exemple le BDS (bureau des sports).

Sur les cinq années d'études, le cycle « licence » dure les trois premières années, et les deux dernières années sont celles du cycle de « spécialisation ».

On constate que, dans cette école, il y a 40 % d'étudiants dans le cycle « licence » et 60 % dans le cycle de « spécialisation ». Parmi les étudiants du cycle « licence », 8 % sont membres du BDS ; parmi les étudiants du cycle de « spécialisation », 10 % sont membres du BDS.

On considère un étudiant de cette école choisi au hasard, et on considère les évènements suivants :

L : « L 'étudiant est dans le cycle licence ».

B : « L 'étudiant est membre du BDS ».

1. Construire l'arbre pondéré modélisant la situation.

2. Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » et membre du BDS.

3. Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit membre du BDS.

4. Calculer $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{L})$ et interpréter le résultat.

5. Le BDS décide d'organiser une randonnée en montagne. Cette sortie est proposée à tous les étudiants de cette école mais le prix qu'ils auront à payer pour y participer est variable. Il est de 60 € pour les étudiants qui ne sont pas membres du BDS, et de 20 € pour les étudiants qui sont membres du BDS.

On désigne par X la variable aléatoire donnant la somme à payer pour un étudiant qui désire faire cette randonnée. Établir, en la justifiant, la loi de probabilité de X.

Corrigé du DS 7 de mathématiques

Exercice 1

1. c) $\dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$ par la dérivée d'un quotient.

2. a) $\overrightarrow{HB}\,.\,\overrightarrow{HC}$ car ABC est un triangle équilatéral donc la médiane (HC) est aussi une hauteur du triangle.

3. b) $u_3 = 11$ car

$$u_2 = 3u_1 + 2u_0 = 3\times1 + 2\times0 = 3$$

et ensuite

$$u_3 = 3u_2 + 2u_1 = 3\times3 + 2\times1 = 11$$

4. c) car d'une part :

$$\frac{e^a}{e^{-b}} = e^{a-(-b)} = e^{a+b}$$

et d'autre part :

$$\frac{e^b}{e^{-a}} = e^{b-(-a)} = e^{b+a} = e^{a+b}$$

5. b) car
$$\begin{aligned} f(x) &= 0,5(x-2)^2 - 8 \\ &= 0,5[(x-2)^2 - 16] \\ &= 0,5[(x-2)^2 - 4^2] \\ &= 0,5(x-2-4)(x-2+4) \\ &= 0,5(x-6)(x+2) \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Le volume diminue de 4 % au bout d'une semaine donc :

$$80 \text{ m}^3 - 4\ \% \times 80 \text{ m}^3 = 0{,}96 \times 80 \text{ m}^3 = 76{,}8 \text{ m}^3$$

Ce bassin contient 76,8 m^3 d'eau une semaine après son remplissage.

2. a. Le volume diminue de 4 % d'une semaine à la suivante donc, pour tout entier naturel n, on a :

$$V_{n+1} = V_n - 4\ \%\ V_n = 0{,}96\ V_n$$

b. Pour tout entier naturel n, on a :

$$V_{n+1} = 0{,}96\ V_n$$

Donc, par définition, la suite (V_n) est géométrique de raison 0,96.

Maintenant, d'après un théorème sur les suites géométriques, le terme général peut s'écrire :

$$V_n = V_0 \times 0{,}96^n$$

ce qui donne en conclusion

$$V_n = 80 \times 0{,}96^n$$

c. Pour $n = 7$, on obtient :

$$V_7 = 80 \times 0{,}96^7 \approx 60{,}1 \text{ (arrondi à } 0{,}1 \text{ m}^3\text{)}$$

Au bout de 7 semaines, le bassin contient environ 60,1 m^3.

3. (Dans cette fonction Python, la variable V contient les volumes d'eau successifs, et la variable N contient les numéros de la semaine correspondante. La boucle indique que le volume d'eau est calculé tant qu'il est supérieur à U et la fonction renvoie alors le nombre N de semaines correspondant.)

Avec la calculatrice, on trouve que l'instruction nombreSemaine(50) renvoie 12.

Il faut 12 semaines pour que le volume d'eau devienne inférieur à 50 m^3.

Exercice 3

Partie A

1. Par lecture graphique, le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours, en tenant compte de l'unité indiquée, est d'environ 5 000 pucerons.

2. La vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t = 0$ est le nombre dérivé $f'(0)$, qui est égal à la pente de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0. Comme celle-ci passe par les points de coordonnées (0 ; 2,1) et (2 ; 4,3), on a :

$$f'(0) = \frac{4{,}3-2{,}1}{2-0} = 1{,}1$$

La vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t = 0$ est donc égale à 1,1.

Partie B

1. Pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 20] :

$$f'(t) = 0{,}003\times 3t^2 - 0{,}12\times 2t + 1{,}1$$

$$f'(t) = 0{,}009t^2 - 0{,}24t + 1{,}1$$

Avec la calculatrice : $f'(20) = 0{,}009\times 20^2 - 0{,}24\times 20 + 1{,}1 = -0{,}1$.

2. $f'(t)$ est un polynôme du second degré.

Son discriminant est $\Delta = (-0{,}24)^2 - 4\times 0{,}009\times 1{,}1 = 0{,}018$.

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{-(-0{,}24)-\sqrt{0{,}018}}{2\times 0{,}009} = \frac{0{,}24-\sqrt{0{,}018}}{0{,}018} \approx 5{,}88 \text{ (arrondi au centième)}$$

et

$$\frac{0{,}24+\sqrt{0{,}018}}{0{,}018} \approx 20{,}79 > 20 \text{ (arrondi au centième)}$$

De plus, comme $0{,}009 > 0$, $f'(t)$ est positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieur.

Déterminons quelques images utiles :

$$f\left(\frac{0{,}24-\sqrt{0{,}018}}{0{,}018}\right) \approx 5{,}03 \text{ (arrondi au centième)}$$

$$f(0) = 2{,}1$$

$$f(20) = 0{,}1$$

Sur l'intervalle [0 ; 20], on obtient donc le tableau de variations suivant :

t	0		5,88		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	2,1	↗	5,03	↘	0,1

3. D'après le tableau de variation, la fonction f admet, en environ 5,88, un maximum approximativement égal à 5,03.

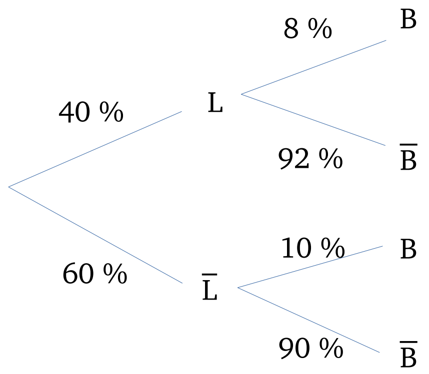
Donc d'après ce modèle, le nombre maximal de pucerons, à la dizaine près, sur la période de 20 jours est 5 030.

5,88 jours = 5 jours + 0,88×24 h = 5 jours 21,12 h

Il est ainsi atteint à 5 jours et 21 h.

Exercice 4

1.



2. D'après un théorème :

$$p(\text{L}\cap\text{B}) = p(\text{L}) \times p_{\text{L}}(\text{B}) = 40\ \% \times 8\ \% = 3{,}2\ \%$$

La probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » et membre du BDS est 3,2 %.

3. D'après la formule des probabilités totales (et ce qui précède), on obtient :

$$p(\text{B}) = p(\text{L}\cap\text{B}) + p(\overline{\text{L}}\cap\text{B}) = p(\text{L}\cap\text{B}) + p(\overline{\text{L}}) \times p_{\overline{\text{L}}}(\text{B}) = 3{,}2\ \% + 60\ \% \times 10\ \% = 9{,}2\ \%$$

La probabilité que l'étudiant choisi soit membre du BDS est 9,2 %.

4. D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$p_{\text{B}}(\text{L}) = \frac{p(\text{L}\cap\text{B})}{p(\text{B})} = \frac{3{,}2\ \%}{9{,}2\ \%} = \frac{8}{23}$$

La probabilité que l'étudiant choisi soit en cycle « licence » sachant qu'il est membre du BDS est $\frac{8}{23}$.

5. La variable aléatoire X prend les valeurs 20 et 60.

$p(\text{X} = 20) = p(\text{B}) = 9{,}2\ \%$

$p(\text{X} = 60) = 1 - p(\text{X} = 20) = 1 - 9{,}2\ \% = 90{,}8\ \%$.

En résumé :

x_i	20	90
$p(\text{X} = x_i)$	9,2 %	90,8 %