Devoir surveillé de mathématiques n°7

La calculatrice est autorisée. La qualité de la copie comptera dans la notation.

Ce sujet comporte 4 exercices sur 4 pages. ***Il sera rendu avec la copie.***

Exercice 1 (5 points)

Ce QCM comprend cinq questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. **Pour chaque question, indiquer sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.** Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. Dans un repère orthonormé, on considère les points A(–1 ; –2), B(2 ; 0), C(3 ; –1) et D(–3 ; 4). Alors, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ est égal à :

a) 16 b) –11 c) –21 d) 24

2. Soit x un nombre réel. Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\,(-x+4\,;\,7)$ et $\vec{v}\,(9\,;\,2x-5)$ sont orthogonaux lorsque x est égal à :

a) $\frac{1}{5}$ b) 10 c) $-\frac{1}{5}$ d) 6

3. ABC est un triangle tel que AB = 5, BC = 2 et $\widehat{ABC} = 60°$. La longueur AC est égale à :

a) $\sqrt{19}$ b) $\sqrt{21}$ c) $\sqrt{28}$ d) $\sqrt{29}$

4. Dans un repère orthonormé, on considère les points A(5 ; –1), B(3 ; 2) et C(1 ; –3). Une mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{ABC}$ est :

a) 11 b) 25 c) 55 d) 88

5. On considère un rectangle ABCD tel que AB = 3 et AD = 2. Alors le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ vaut :

a) 0 b) 5 c) 6 d) -6

Exercice 2 (5 points)

Durant l'été, une piscine extérieure perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau par évaporation. On étudie ici un bassin qui contient 80 m^3 après son remplissage.

1. Calculer le volume d'eau contenu par ce bassin une semaine après son remplissage.

2. On ne rajoute pas d'eau dans le bassin et l'eau continue à s'évaporer. On modélise le volume d'eau contenue dans la piscine par une suite (V_n) : pour tout entier naturel n, on note V_n la quantité d'eau en m^3 contenue dans la piscine n semaines après son remplissage. Ainsi $V_0 = 80$.

   a. Exprimer, pour tout entier naturel n, V_{n+1} en fonction de V_n .

   b. Quelle est la nature de la suite (V_n).

   c. Donner une expression de V_n en fonction de n.

   d. Quelle quantité d'eau contient le bassin au bout de 7 semaines ? Arrondir au m^3.

3. Recopier et compléter sur la copie les lignes 4 et 7 de la fonction Python afin qu'elle renvoie le nombre de semaines à partir duquel le volume d'eau de la piscine sera inférieur à 50 m^3.

```
1   def seuil() :
2       N=0
3       V=80
4       while ......... :
5           N=N+1
6           V= 0.96*V
7       return ...
```

Exercice 3 (5 points)

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 60% de la population concernée est contre la construction de ce barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes

On interroge une personne au hasard. On note C l'événement « la personne interrogée est contre le barrage » et E l'événement « la personne interrogée est écologiste ».

1. Écrire les probabilités correspondantes aux données puis construire un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste.

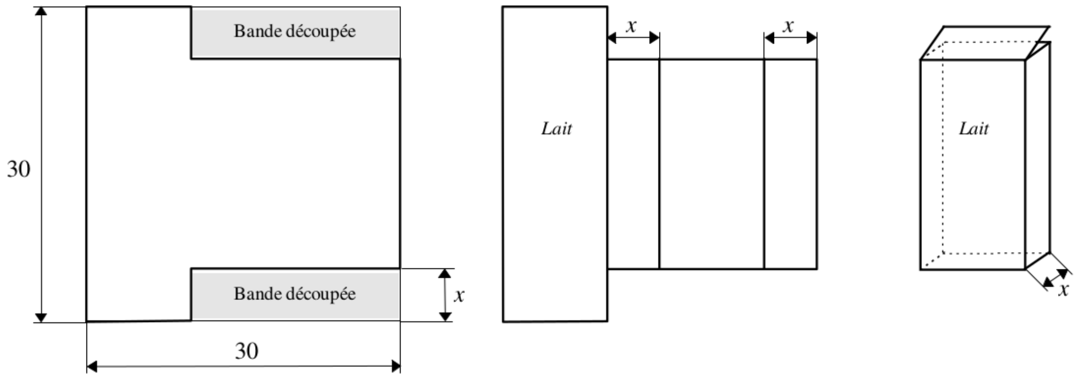
3. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

4. Déterminer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage sachant qu'elle est écologiste.

5. Les évènements C et E sont-ils indépendants ?

Exercice 4 (5 points)

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en cm) de la largeur des deux bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

1. Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

2. Calculer la dérivée $V'(x)$.

3. Étudier le signe de la dérivée sur $]0 ; 15[$.

4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction V sur $]0 ; 15[$.

5. Déterminer la contenance maximale, en litres, de la brique et la mesure, en cm, de la largeur des deux bandes découpées nécessaire pour l'obtenir. *Justifier.*

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°7

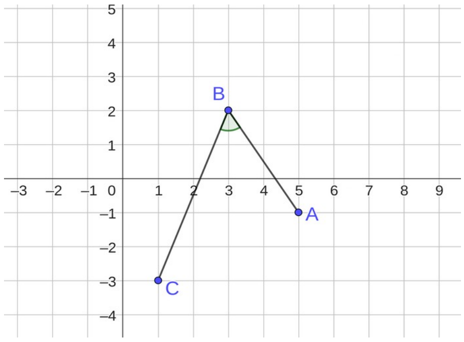
Exercice 1 (5 points)

1. $\overrightarrow{AC}$ (4 ; 1) et $\overrightarrow{DB}$ (5 ; –4) donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 4\times5 + 1\times(-4) = 16$

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (-x + 4)\times9 + 7(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$

3. Par le théorème d'Al-Kashi : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC}) = 25 + 4 - 2\times5\times2\times0,5 = 19$ donc $AC = \sqrt{19}$.

4. Un dessin soigné suffit à obtenir par élimination la bonne approximation : $\widehat{ABC} \approx 55°$.



5.
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= -\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + 0 + 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= -2^2 + 3^2 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Exercice 2 (5 points)

1. Le volume diminue de 4 % au bout d'une semaine donc :

$$80 \text{ m}^3 - 4\ \% \times 80 \text{ m}^3 = 0{,}96 \times 80 \text{ m}^3 = 76{,}8 \text{ m}^3$$

Ce bassin contient 76,8 m^3 d'eau une semaine après son remplissage.

2. a. Le volume diminue de 4 % d'une semaine à la suivante donc, pour tout entier naturel n, on a :

$$V_{n+1} = V_n - 4\ \%\ V_n \text{ soit } \boxed{V_{n+1} = 0{,}96\ V_n}$$

b. Pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0{,}96\ V_n$ donc la suite (V_n) est géométrique de raison 0,96.

c. D'après un théorème sur les suites géométriques, on a :

$$V_n = V_0 \times 0{,}96^n$$

ce qui donne

$$\boxed{V_n = 80 \times 0{,}96^n}$$

d. Pour $n = 7$, on obtient :

$$V_7 = 80 \times 0{,}96^7 \approx 60$$

Au bout de 7 semaines, le bassin contient environ 60 m^3 (arrondi au m^3).

3. Dans cette fonction Python, la variable V contient les volumes d'eau successifs, et la variable N contient les numéros des semaines correspondantes.

Comme on souhaite déterminer le numéro N de la première semaine à partir de laquelle le volume d'eau V contenu dans la piscine devient inférieur à 50 m^3, la boucle doit être exécutée tant que ce volume est supérieur ou égal à 50.

La variable N contient le numéro de la semaine, c'est donc sa valeur que la fonction doit retourner.

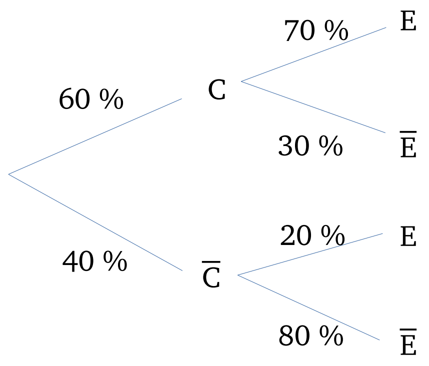
```
4        while V >= 50 :

7        return N
```

Exercice 3 (5 points)

1. D'après l'énoncé, on a : $p(\mathrm{C}) = 60\ \%$, $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) = 70\ \%$ et $p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{E}) = 20\ \%$.

Cela donne l'arbre pondéré suivant :



2. D'après un théorème :

$$p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}) = p(\mathrm{C}) \times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}) = 70\ \% \times 60\ \% = 42\ \%$$

<u>La probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste est 42 %.</u>

3. D'après la formule des probabilités totales et ce qui précède, on obtient :

$$p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{C}}\cap\mathrm{E}) = p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{C}}) \times p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{E}) = 42\ \% + 40\ \% \times 20\ \% = 50\ \%$$

<u>La probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste est 50 %.</u>

4. D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{C}) = \frac{p(\mathrm{C}\cap\mathrm{E})}{p(\mathrm{E})} = \frac{42\ \%}{50\ \%} = 84\ \%$$

<u>La probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage sachant qu'elle est écologiste est 84 %.</u>

5. $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{C}) = 84\ \% \neq p(\mathrm{C}) = 60\ \%$.

Donc <u>les évènements C et E ne sont pas indépendants</u>.

Exercice 4 (5 points)

1. Les dimensions L, l et h de la brique, en cm, sont : $L = \dfrac{30-2x}{2} = 15 - x$, $l = x$ et $h = 30 - 2x$.

On peut alors calculer son volume :

$$\begin{aligned} V(x) &= x\,(15 - x)\,(30 - 2x) \\ &= x\,(450 - 60x + 2x^2) \\ &= 2x^3 - 60x^2 + 450x \end{aligned}$$

Le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

2. $V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$ soit :

$$\boxed{V'(x) = 6(x^2 - 20x + 75)}$$

3. La dérivée V ' est un polynôme du second degré. On détermine ses racines à l'aide du discriminant ou en remarquant que 5 est une racine de V ' qui donne, le produit des racines valant 75, 15 comme seconde racine. Ensuite, comme le coefficient de x^2 est 6, il est positif et on en déduit que $V'(x) > 0$ à l'extérieur des racines 5 et 15 :

$$\boxed{V'(x) > 0 \text{ sur }]\,0\,;\,5\,[\text{ et } V'(x) < 0 \text{ sur }]\,5\,;\,15\,[}$$

4. D'après la question 1, $V(5) = 5\,(15 - 5)\,(30 - 2\times 5) = 5 \times 10 \times 20 = 1\,000$.

D'après la question 3 et ce résultat, on peut dresser le tableau de variations de la fonction V sur]0 ; 15[.

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	−	
V		↗	1000	↘	

5. D'après le tableau de variations, V atteint un maximum en 5 et ce maximum est égal à 1000 donc le volume maximum est égal à 1 000 cm^3. Or : 1 000 cm^3 = 1 dm^3 = 1 L.

En conclusion, la contenance maximale, en litres, de la brique est 1 L et la mesure, en cm, de la largeur des deux bandes découpées nécessaire pour l'obtenir est 5 cm.