DS 8 de mathématiques

La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (10 points)

Ce QCM comprend cinq questions. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Les questions sont indépendantes. **Pour chaque question, indiquer sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie.** Aucune justification n'est demandée mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse. Chaque réponse correcte rapporte deux points. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

1. Quelle est l'affirmation correcte ?

a) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est strictement positif, alors ce polynôme admet 2 racines positives.

b) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est strictement négatif, alors ce polynôme admet 2 racines négatives.

c) Si un polynôme du second degré est toujours strictement positif, alors ce polynôme n'admet pas de racine.

d) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est nul, alors ce polynôme admet le nombre 0 pour racine.

2. La somme $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{30}$ est égale à :

a) $\dfrac{1-5^{30}}{4}$ b) $\dfrac{1-5^{31}}{4}$

c) $\dfrac{5^{30}-1}{4}$ d) $\dfrac{5^{31}-1}{4}$

3. Soit ABCD un parallélogramme tel que AB = 3, AD = 4 et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$. Alors $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$ vaut :

a) 12 b) -12 c) 6 d) -6

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

a) $f'(1) = 1$ b) $f'(1) = 3$ c) $f'(1) = -1$ d) $f'(1) = 0$

5. Dans un atelier 3% des pièces produites sont défectueuses. On constate qu'au cours du contrôle qualité, si la pièce est bonne, elle est acceptée dans 95% des cas, et que si elle est défectueuse, elle est refusée dans 98% des cas. La probabilité qu'une pièce soit refusée est égale à :

a) 0,0779 b) 0,0294 c) 0,0485 d) 0,98

Exercice 2 (10 points)

Une entreprise vend des smartphones « haut de gamme ».

Le service marketing modélise le nombre de smartphones vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par

$$N(x) = 100\, e^{-2x}$$

où x est le prix de vente **en milliers d'euros** d'un smartphone (le prix du smartphone est compris entre 400 € et 2000 € : on a donc $x \in [0,4 ; 2]$) et $N(x)$ est le nombre de smartphones vendus trimestriellement **en millions d'unités**.

La recette trimestrielle $R(x)$ **en milliards d'euros** est donc :

$$R(x) = x \times N(x)$$

Le coût de production **en milliards d'euros** en fonction du prix x est modélisé par la fonction C définie par :

$$C(x) = 0{,}39 \times N(x)$$

Le bénéfice $B(x)$ est alors la différence entre la recette et le coût de production.

1. Si le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone à 1000 €, quel sera la recette trimestrielle attendue ? On arrondira le résultat au million d'euros.

2. Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x en milliers d'euros par :

$$B(x) = (100x - 39)\, e^{-2x}$$

3. Calculer, pour tout réel $x \in [0,4 ; 2]$, $B'(x)$.

4. En déduire, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0,4 ; 2]$.

5. À quel prix faut-il vendre ce smartphone pour espérer un bénéfice trimestriel maximal et quel sera ce bénéfice trimestriel maximal, arrondi au million ? Justifier.

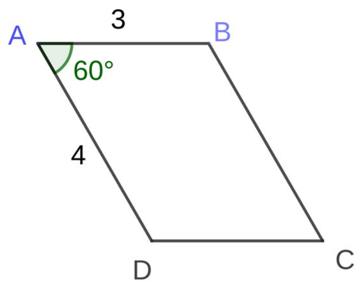
Corrigé du DS 8 de mathématiques

Exercice 1 (10 points)

1. c) Si un polynôme du second degré est toujours strictement positif, alors il ne s'annule pas, autrement dit ce polynôme n'admet pas de racine.

2. d) D'après un théorème : $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{30} = \dfrac{1-5^{31}}{1-5} = \dfrac{1-5^{31}}{-4} = \dfrac{5^{31}-1}{4}$

3. d) Dans le parallélogramme ABCD, $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\widehat{CDA} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.



$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA \times DC \times \cos(\widehat{CDA}) = 4 \times 3 \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 12 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -6$

4. b) $f'(x) = 2 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(1) = 2 + \dfrac{1}{1^2} = 2 + 1 = 3$.

5. a) On note R : « La pièce est refusée » et D : « La pièce est défectueuse ». La formule des probabilités totales donne : $p(R) = p(D\cap R) + p(\overline{D}\cap R) = p(D) \times p_D(R) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = 0{,}03 \times 0{,}98 + 0{,}97 \times 0{,}05 = 0{,}0779$.

Exercice 2 (10 points)

1. Le prix de vente x s'exprime en milliers d'euros donc on recherche la recette $R(1)$, qui, étant obtenue en milliards d'euros, doit être arrondie au millième :

$$R(1) = 1 \times N(1) = 100\, e^{-2} \approx 13{,}534$$

La recette trimestrielle attendue est environ 13 534 000 000 € (arrondi au million d'euros).

2. On a, pour tout réel $x \in [0{,}4 ; 2]$:

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= x \times N(x) - 0{,}39 \times N(x) \\ &= x \times 100\, e^{-2x} - 0{,}39 \times 100\, e^{-2x} \\ B(x) &= (100x - 39)\, e^{-2x} \end{aligned}$$

3. Pour tout réel $x \in [0{,}4\ ;\ 2]$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= 100\, e^{-2x} + (100x - 39) \times (-2\, e^{-2x}) \\ &= (100 - 200x + 78)\, e^{-2x} \\ B'(x) &= (178 - 200x)\, e^{-2x} \end{aligned}$$

4. Pour tout réel $x \in [0{,}4\ ;\ 2]$:

$$e^{-2x} > 0$$

$B'(x)$ est donc du même signe que l'expression affine $178 - 200x$ qui s'annule en $\dfrac{178}{200} = 0{,}89$ et dont le coefficient directeur est négatif.

De plus :

$$B(0{,}4) = (100 \times 0{,}4 - 39)\, e^{-2\times 0{,}4} = e^{-0{,}8}$$

$$B(0{,}89) = (100 \times 0{,}89 - 39)\, e^{-2\times 0{,}89} = 50\, e^{-1{,}78}$$

$$B(2) = (100 \times 2 - 39)\, e^{-2\times 2} = 161\, e^{-4}$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	0,4		0,89		2
e^{-2x}		+		+	
$178 - 200x$		+	0	−	
$B'(x)$		+	0	−	
B	$e^{-0{,}8}$	↗	$50\, e^{-1{,}78}$	↘	$161\, e^{-4}$

5. D'après le tableau de variations, la fonction B atteint en 0,89 un maximum égal à $50\, e^{-1{,}78}$.

Le prix de vente 0,89 s'exprime en milliers d'euros et le bénéfice $50\, e^{-1{,}78}$ en milliard d'euros. Or :

$$50\, e^{-1{,}78} \approx 8{,}432 \text{ (arrondi au million)}$$

Il faut donc vendre ce smartphone 890 € pour espérer un bénéfice maximal d'environ 8 432 000 000 €.