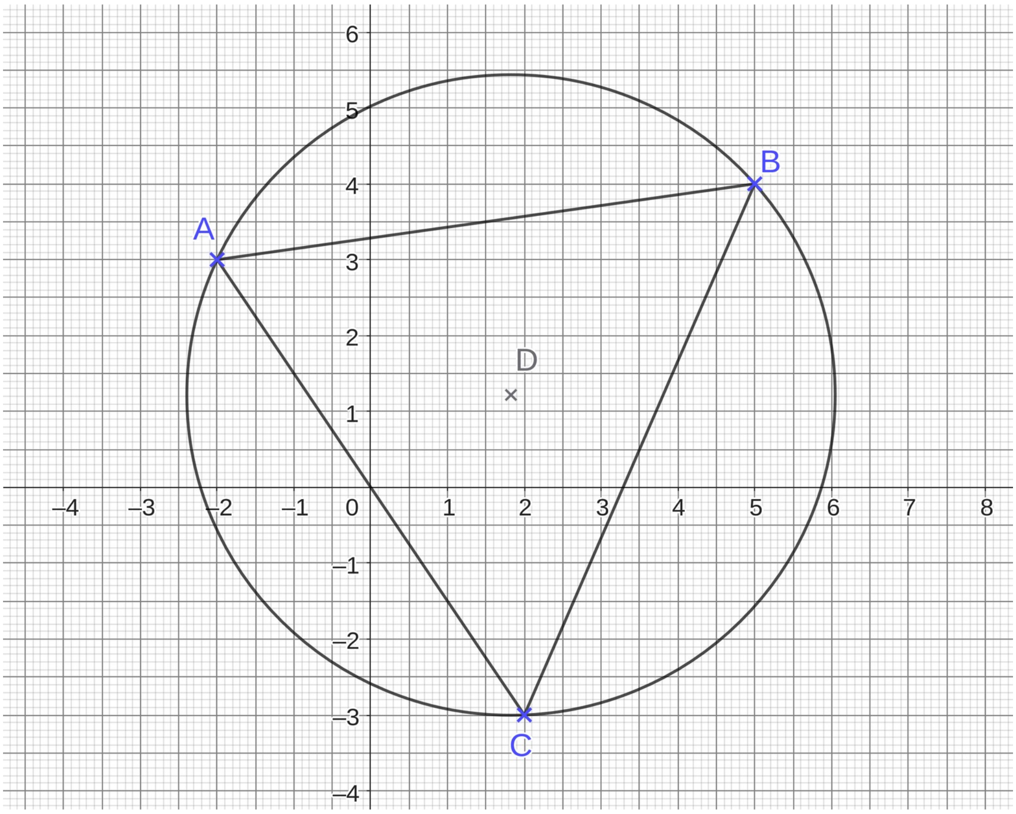
Nom et prénom : ____ 3^{e} trimestre

Devoir surveillé de mathématiques n°10

La calculatrice est autorisée. La qualité de la copie comptera dans la notation.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(–2 ; 3), B(5 ; 4) et C(2 ; –3). La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment et passant par son milieu. Le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'intersection de ses médiatrices. À l'aide d'un logiciel, on a tracé le cercle circonscrit au triangle ABC et marqué son centre D (voir le graphique). Le logiciel donne des valeurs approchées des coordonnées de D : (1,83 ; 1,22). L 'objectif de l'exercice est de trouver les valeurs exactes des coordonnées du point D.



1. Calculer les coordonnées du milieu I du segment [BC]. Marquer I sur le graphique.

2. Expliquer pourquoi $\vec{n}$ (3 ; 7) est un vecteur normal à la médiatrice du segment [BC].

3. a. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

   b. Vérifier à l'aide de l'équation cartésienne obtenue que le point E(7 ; –1) appartient à la médiatrice du segment [BC].

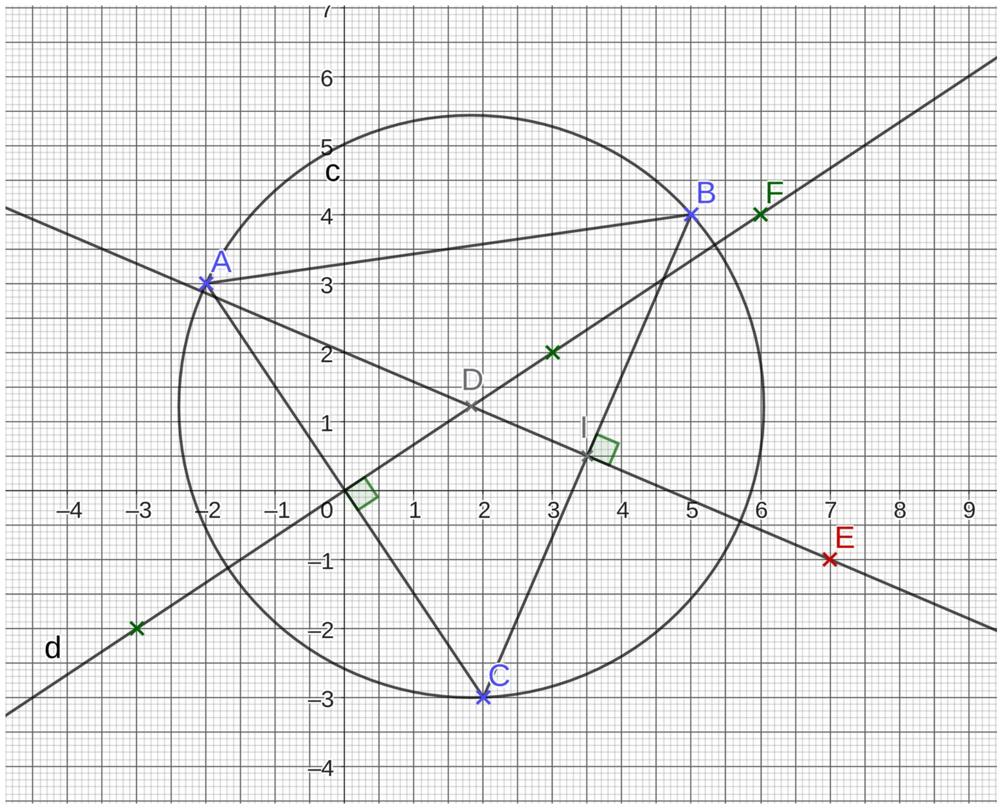
4. a. Tracer la droite $d : 2x - 3y = 0$ en expliquant la démarche.

   b. Démontrer que la médiatrice du segment [AC] admet pour équation $2x - 3y = 0$.

5. Calculer les coordonnées du point D.

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°8

1. $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{5+2}{2} = 3{,}5$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4+(-3)}{2} = 0{,}5$ donc I(3,5 ; 0,5).



2. La médiatrice de [BC] est par définition perpendiculaire à [BC]. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est ainsi un vecteur normal à cette médiatrice.

Or, $x_{\overrightarrow{BC}} = 2 - 5 = -3$ et $y_{\overrightarrow{BC}} = -3 - 4 = -7$. On a donc $\overrightarrow{BC}\,(-3 ; -7)$ et comme $\vec{n}\,(3 ; 7)$, on en déduit que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires (en effet, $\vec{n} = -\overrightarrow{BC}$).

En conclusion, $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à la médiatrice du segment [BC].

3. a. La médiatrice (ID) du segment [BC] admet le vecteur $\vec{n}\,(3 ; 7)$ comme vecteur normal. Une de ses équations cartésiennes est donc de la forme : $3x + 7y + c = 0$.

Comme la médiatrice passe par I(3,5 ; 0,5), on a : $3\times3{,}5 + 7\times0{,}5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -14$.

En conclusion, une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC] est :

$$3x + 7y - 14 = 0$$

b. En prenant $x = 7$ et $y = -1$, on a $3\times7 + 7\times(-1) - 14 = 21 - 7 - 14 = 0$ donc $E(7 ; -1) \in (ID)$.

4. a. En prenant $x = 0$ et $y = 0$, on a $2\times0 - 3\times0 = 0 - 0 = 0$ donc la droite d passe par l'origine O(0 ; 0).

Et en prenant $x = 6$ et $y = 4$, on a $2\times6 - 3\times4 = 12 - 12 = 0$ donc la droite d passe aussi par F(6 ; 4).

On peut alors tracer la droite d.

Remarque : les couples d'entiers (–3 ; –2) et (3 ; 2) convenaient également.

b. Calculons d'abord les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$x_{\overrightarrow{AC}} = 2 - (-2) = 4 \text{ et } y_{\overrightarrow{AC}} = -3 - 3 = -6$$

Donc : $\overrightarrow{AC}$ (4 ; –6).

La médiatrice du segment [AC] admet le vecteur $\overrightarrow{AC}$ (4 ; –6) comme vecteur normal. Une de ses équations cartésiennes est donc de la forme : $4x - 6y + c = 0$.

Déterminons ensuite les coordonnées du milieu du segment [AC].

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 \text{ et } \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+(-3)}{2} = 0$$

Donc l'origine O(0 ; 0) du repère est le milieu du segment [AC].

Comme la médiatrice passe par O(0 ; 0), on a : $4\times 0 - 6\times 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

En conclusion, une équation cartésienne de la médiatrice du segment [AC] est $4x - 6y = 0$ ce qui donne, après simplification par 2 :

$$2x - 3y = 0$$

5. Le point D est l'intersection des médiatrices donc pour trouver ses coordonnées, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+7y-14=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+14y-28=0 & (1) \\ 6x-9y=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14y+9y-28=0 & (1)-(2) \\ 2x-3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{28}{23} \\ 2x-3\times\dfrac{28}{23}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{28}{23} \\ 2x=\dfrac{84}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{42}{23} \\ y=\dfrac{28}{23} \end{cases}$$

En conclusion :

$$D\left(\frac{42}{23} ; \frac{28}{23}\right)$$