Nom et prénom : ______________________________ 3e trimestre

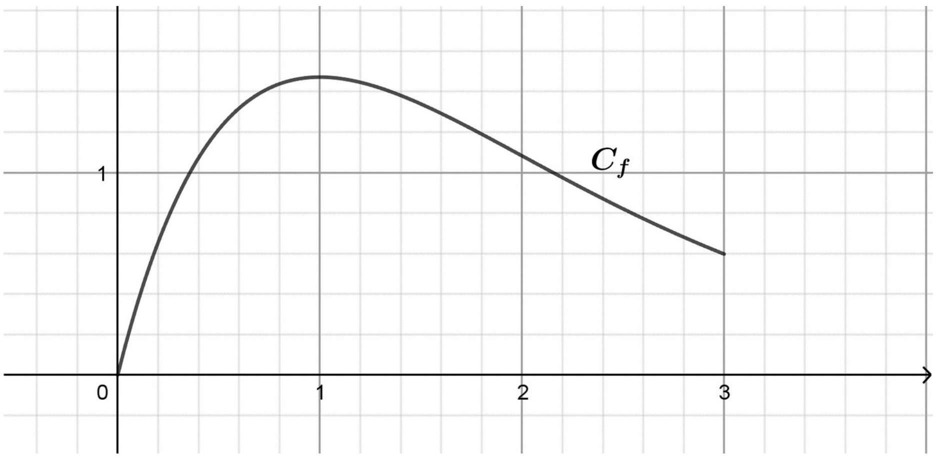
Devoir surveillé de mathématiques n°11

La calculatrice est autorisée. La qualité de la copie comptera dans la notation.

Soit la fonction f définie sur [0 ; 3] par :

$$f(x) = 4\,x\,e^{-x}$$

1. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'origine O.



Conjecturer une valeur approchée du maximum de f sur [0 ; 3]. *Aucune justification attendue.*

2. La fonction f est dérivable sur [0 ; 3].

Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 3] :

$$f'(x) = 4(1 - x)e^{-x}$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 3].

4. En déduire le tableau de variations complet de f sur [0 ; 3].

5. Déterminer la valeur exacte du maximum de f sur [0 ; 3].

6. Soit A le point d'abscisse 1 de C_f et soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 0,4.

Quelle droite possède le plus grand coefficient directeur : la droite (AO) ou la droite T ? Justifier.

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°11

1. Le quadrillage secondaire du graphique mesure 0,4. D'après le graphique, le maximum de f est atteint pour $x \approx 1$ et d'après le quadrillage, il est compris entre 1,4 et 1,6. En utilisant le milieu 1,5 de ces deux valeurs, on obtient une lecture un peu plus précise : le maximum est compris entre 1,4 et 1,5. Enfin, le maximum est plus proche de 1,5 que de 1,4 ce qui permet d'affiner la valeur : elle est compriss entre 1,45 et 1,5.

2. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur [0 ; 3].

On note $u = 4\,x$ et $v = e^{-x}$ (on remarque que v est de la forme e^{ax+b} avec $a = -1$ et $b = 0$).

On a alors : $u' = 4$ et $v' = -\,e^{-x}$.

La dérivée d'un produit permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,e^{-x} + 4\,x\,(-e^{-x}) \\ &= 4\,e^{-x} - 4\,x\,e^{-x} \\ &= 4\,e^{-x}\,(1 - x) \\ &= 4(1 - x)e^{-x} \end{aligned}$$

3. Étudions le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 3] à l'aide d'un tableau de signes.

x	0		1		3
4		+	|	+	
$1 - x$		+	0	−	
e^{-x}		+	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	

4. Calculons les images de 0, 1 et 3 par f.

$$f(0) = 4\times0\times e^{0} = 0$$

$$f(1) = 4\times1\times e^{-1} = 4e^{-1}$$

$$f(3) = 4\times3\times e^{-3} = 12e^{-3}$$

On en déduit le tableau de variations complet de f sur [0 ; 3].

x	0		1		3
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	$4e^{-1}$	↘	$12e^{-3}$

5. D'après le tableau de variations, f admet un maximum sur [0 ; 3] en 1 qui vaut $4e^{-1}$.

Une valeur approchée permet de s'assurer de la cohérence avec le graphique et la question 1 : $4e^{-1} \approx 1{,}471...$

6. Calculons le coefficient directeur de la droite (AO).

$$\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{4e^{-1} - 0}{1 - 0} = 4e^{-1} \approx 1{,}471...$$

Calculons le coefficient directeur de la droite T tangente à C_f au point d'abscisse 0,4.

$$f'(0{,}4) = 4(1 - 0{,}4)e^{-0{,}4} = 2{,}4\, e^{-0{,}4} \approx 1{,}608...$$

En conclusion, la droite T possède le plus grand coefficient directeur (voir ci-dessous).