Second degré : forme factorisée

Cours

« Un jeune aujourd'hui ne peut pas manquer sur l'envie. Tu peux manquer techniquement, ça peut arriver. Mais sur l'envie, tu dois avoir plus faim que les autres. »

Mehdi Benatia

I. Définition

Les fonctions affines étudiées en 3e et en 2de sont ce qu'on appelle des fonctions polynômes du 1er degré : leur expression algébrique peut s'écrire sous la forme $ax + b$.

Définition 1. Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

pour tout réel x.

Théorème 1. La forme $ax^2 + bx + c$ est unique.

Démonstration. On suppose qu'il existe six réels a, b, c, a', b' et c' (a et a' non nuls) tels que, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

Lorsque $x = 0$, on obtient $c = c'$.

Lorsque $x = 1$, on obtient $a+b+c = a'+b'+c'$ ce qui donne, puisque $c = c'$: $a+b = a'+b'$ (égalité 1).

Et lorsque $x = -1$, on obtient $a - b + c = a' - b' + c'$ ce qui donne, puisque $c = c'$: $a - b = a' - b'$ (égalité 2).

En sommant les égalités 1 et 2, on obtient $2a = 2a'$ soit $a = a'$ et en réutilisant l'égalité 1 par exemple on obtient enfin que $b = b'$.

Ce qui montre que la forme est unique.

Comme elle est unique, on l'appelle la **forme développée** du polynôme. Comme il y a trois termes, on emploie parfois le mot **trinôme** pour désigner un polynôme du second degré. a, b et c sont les **coefficients** du polynôme : ils seront notés ainsi dans toute la suite de ce cours.

Exemple 1. Reconnaître les fonctions polynômes du second degré : $f : x \mapsto (x-1)^2 - x^2$, $g : x \mapsto (1-x)^2 + x^2$ et $h : x \mapsto 2x(x-1)^2 + 4x^2$.

Solution. $f(x) = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$ donc f est une fonction polynôme du 1er degré, une fonction affine.

$g(x) = 1 - 2x + x^2 + x^2 = 2x^2 - 2x + 1$ donc g est une fonction polynôme du second degré ($a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$).

$h(x) = 2x(x^2 - 2x + 1) + 4x^2 = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 4x^2 = 2x^3 + 2x$ donc h est une fonction polynôme du 3e degré.

II. Racines et factorisation d'un polynôme

Définition 2. Soit f une fonction polynôme du second degré.
On appelle **racine** du polynôme f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Si elles existent, les racines d'un polynôme sont donc les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative du polynôme avec l'axe des abscisses.

Exemple 2. Montrer que 2 est une racine de la fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$.

Solution. $f(2) = 2 \times 2^2 - 7 \times 2 + 6 = 8 - 14 + 6 = 0$ donc 2 est une racine du polynôme du second degré f.

Théorème 2. Soit f une fonction polynôme du second degré.
Si le polynôme f possède une racine x_1 alors il existe un réel x_2 (pas nécessairement différent de x_1) tel que le polynôme puisse être factorisé sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

et le réel x_2 est également une racine de f.

Démonstration. On prend f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients : $f(x) = ax^2 + bx + c$. On suppose que f possède une racine x_1.

Puisque $f(x_1) = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(x_1) \qquad \text{(un peu étrange, mais ça va s'éclairer)} \\
&= ax^2 + bx + c - ax_1^2 - bx_1 - c \\
&= a\left(x^2 - x_1^2\right) + b(x - x_1) \\
&= a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) \\
&= a(x - x_1)\left((x + x_1) + \frac{b}{a}\right) \qquad \text{(car } a \neq 0\text{)} \\
&= a(x - x_1)\left(x - \left(-x_1 - \frac{b}{a}\right)\right)
\end{aligned}$$

On note alors $x_2 = -x_1 - \dfrac{b}{a}$ et on a bien :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Comme $f(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) = 0$, x_2 est également une racine de f.

Théorème 3. Soit f une fonction polynôme du second degré. On suppose que f possède deux racines distinctes x_1 et x_2 ou une racine unique x_1 et on pose dans ce cas $x_2 = x_1$. On a alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration. On prend f une fonction polynôme du second degré. On suppose que f possède deux racines distinctes x_1 et x_2 ou une racine unique x_1 et on pose dans ce cas $x_2 = x_1$.

Le théorème 2 donne $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2')$. Comme x_2 est racine, on a $a(x_2 - x_1)(x_2 - x_2') = 0$. Si $x_2 \neq x_1$, la règle du produit nul donne $x_2' = x_2$. Si la racine est unique, comme x_2' est aussi une racine d'après le théorème 2, on a $x_2' = x_2 = x_1$. On a donc dans chaque cas :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

On développe $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ et comme d'après le théorème 1, la forme développée est unique, on obtient, par identification des coefficients, $b = -a(x_1 + x_2)$ et

$c = ax_1x_2$ soit :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

- Certains polynômes du second degré n'admettent aucune racine comme $x^2 + 1$: puisque pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ on a donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ et donc, quel que soit le réel x, $x^2 + 1 \neq 0$.
- Certains polynômes n'admettent qu'une seule racine, comme par exemple $x^2 - 2x + 1$ car, pour tout réel x :

  $$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

  La règle du produit nul dit que ce polynôme n'admet que 1 comme racine (dite alors « racine double »).
- Certains polynômes admettent deux racines, comme par exemple $x^2 + x - 6$ car, pour tout réel x, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ qui admet 2 et -3 comme racines.

Le théorème 4 nous dit qu'il n'y a pas d'autres cas : un polynôme du second degré admet 0, 1 ou 2 racines.

Théorème 4. Une fonction polynôme du second degré admet **au maximum deux racines**.

Démonstration. C'est évident dans le cas où un polynôme f n'admet pas de racine. Maintenant, soit f un polynôme admettant une racine x_1. Le théorème 2 permet d'affirmer qu'il existe un réel x_2 tel que :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$f(x_2) = 0$ donc le nombre x_2 est une racine de f.

Si x_3 est une racine de f, alors $f(x_3) = 0$ donc $a(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$ et ainsi, par la règle du produit nul :

$$x_3 = x_1 \quad \text{ou} \quad x_3 = x_2$$

Donc toute racine est égale à x_1 ou à x_2 : si $x_1 = x_2$, le polynôme admet une seule racine (dite « double »), et si $x_1 \neq x_2$, le polynôme admet deux racines distinctes. Il ne peut pas en avoir plus.

Si un polynôme admet une racine, ces théorèmes permettent d'obtenir sa seconde racine.

Exemple 3. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$. Calculer le produit des racines.

Solution. D'après un théorème, le produit des deux racines du polynôme du second degré f est $\frac{6}{2} = 3$.

Exemple 4. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$. Déduire des exemples précédents la seconde racine de ce polynôme.

Solution. D'après ce qui précède, le nombre 2 est une racine du polynôme du second degré f et le produit des deux racines vaut 3. En notant x_2 la seconde racine, on a :

$$2 \times x_2 = 3 \iff x_2 = 1{,}5$$

Vérifions : $f(1{,}5) = 2 \times 1{,}5^2 - 7 \times 1{,}5 + 6 = 2 \times 2{,}25 - 10{,}5 + 6 = 4{,}5 - 10{,}5 + 6 = 0$.

Théorème 5. Lorsqu'elle existe, la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ est unique, à l'ordre de x_1 et x_2 près.

Démonstration. Supposons $a(x - x_1)(x - x_2) = a'(x - x_1')(x - x_2')$ pour tout réel x.

Le théorème 1 appliqué aux coefficients de x^2 donne $a = a'$.

x_1' est une racine, donc $x_1' = x_1$ ou $x_1' = x_2$. Disons $x_1' = x_1$ (si $x_1' = x_2$, on inverse simplement l'ordre).

Le théorème 1 appliqué aux coefficients de x donne $x_1 + x_2 = x_1 + x_2'$, d'où $x_2' = x_2$.

Définition 3. Soit f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines distinctes x_1 et x_2, ou une racine unique x_1 ; on pose dans ce cas $x_2 = x_1$.

La forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ est appelée **la forme factorisée** du polynôme.

Par exemple, le polynôme $6x^2-18x+12$ admet différentes expressions factorisées, comme $(6x-6)(x-2)$, $(x - 1)(6x - 12)$, $2(3x - 3)(x - 2)$ ou encore $6(x - 1)(x - 2)$ mais c'est uniquement cette dernière qu'on appellera **la** forme factorisée du polynôme $6x^2 - 18x + 12$.

Lorsque le polynôme ne possède pas de racines, on dit simplement qu'il n'est pas factorisable : la forme factorisée n'existe pas.

Exemple 5. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$. Déduire des exemples précédents la forme factorisée de ce polynôme.

Solution. D'après ce qui précède, le polynôme du second degré f admet deux racines, 2 et 1,5, et son coefficient a est 2, donc, d'après un théorème, la forme factorisée de f est :

$$f(x) = 2(x - 1{,}5)(x - 2)$$

Vérifions : $2(x - 1{,}5)(x - 2) = 2\left(x^2 - 2x - 1{,}5x + 3\right) = 2\left(x^2 - 3{,}5x + 3\right) = 2x^2 - 7x + 6$.

III. Signe d'un polynôme ayant deux racines

Théorème 6. Soit f une fonction polynôme du second degré possédant deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$ ou une racine unique x_1 ; on pose dans ce cas $x_2 = x_1$.

- $f(x)$ est du **même signe que a à l'extérieur des racines** (c'est-à-dire sur $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$).
- Si $x_1 \neq x_2$, $f(x)$ est de **signe opposé à a entre les racines** (c'est-à-dire sur $]x_1\,;x_2[$).

Démonstration. D'après la démonstration du théorème 3, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. On distingue deux cas selon le signe de a.

Si $a > 0$, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$-$		$-$		$-$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc, dans les deux cas, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et de signe opposé entre (si $x_1 = x_2$, la colonne centrale doit juste être supprimée), ce qui démontre le théorème.

Ce théorème permet de raccourcir considérablement l'étude du signe d'un polynôme du second degré.

Exemple 6. Soit la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$. Déduire des exemples précédents son signe.

Solution. D'après ce qui précède, le coefficient $a = 2$ est positif et la fonction polynôme du second degré f admet 1,5 et 2 comme racines, donc, d'après un théorème du cours, $f(x)$ est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		$1{,}5$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	