Séance 1 — 35 min environ, hors vérification. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier : ils repèrent les numéros cités. Ne prononcer ni discriminant, ni forme canonique : ils arrivent au chapitre 108.

Page de garde — Partie 1 — *1 min*

Au tableau Le plan : I. Définition ; II. Racines et factorisation ; III. Signe d'un polynôme ayant deux racines.

Anecdote Une tablette babylonienne (vers 1800 av. J.-C.) pose déjà : « J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 0;45 », soit $x^2+x=\frac{3}{4}$, et décrit la méthode en phrases. Le second degré a près de 4 000 ans ; son écriture symbolique, environ 400. *(tablette BM 13901, problème 1 ; J. Høyrup,* Lengths, Widths, Surfaces*, 2002)*

I. Définition — Définition 1, Théorème 1, Exemple 1 — *6 min*

Au tableau Exemple 1, les trois réductions faites en direct :

$$f(x)=(x-1)^2-x^2=x^2-2x+1-x^2=-2x+1 \qquad \text{degré 1 : non}$$
$$g(x)=(1-x)^2+x^2=2x^2-2x+1 \qquad \text{oui : } a=2,\ b=-2,\ c=1$$
$$h(x)=2x(x-1)^2+4x^2=2x^3-4x^2+2x+4x^2=2x^3+2x \qquad \text{degré 3 : non}$$

Retenir : « peut s'écrire » ; on **développe et réduit avant de conclure**, et $a\neq 0$. Le théorème 1 (unicité) donne un sens aux mots « les coefficients a, b, c ».

Anecdote François Viète note en 1591 les grandeurs connues par des consonnes et les inconnues par des voyelles : pour la première fois, on peut écrire un polynôme « en général », avec des coefficients quelconques. *(F. Viète,* In artem analyticem isagoge*, 1591)*

II. Racines et factorisation — Définition 2, Exemple 2, Théorème 2 — *7 min*

Au tableau Exemple 2 : $f(2)=2\times 2^2-7\times 2+6=8-14+6=0$, donc 2 est une racine de f. Montrer qu'un nombre est racine ne demande aucune recherche : on remplace, on calcule, on conclut. Une racine n'a rien à voir avec une racine carrée.

Théorème 2 : dès qu'une racine x_1 existe, une seconde x_2 existe (éventuellement égale) et $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$: une racine ne vient jamais seule.

Anecdote Le mot vient de l'arabe *jidhr*, la base d'un carré, traduit en latin par *radix*. Chez al-Khwārizmī (vers 820), le titre du traité a donné « algèbre » (*al-jabr*), et le nom latinisé de l'auteur, *Algoritmi*, « algorithme ». *(al-Khwārizmī,* Kitāb al-jabr wa-l-muqābala*, vers 820)*

Somme et produit — Théorèmes 3 et 4, Exemples 3 et 4 — *7 min*

Au tableau Somme $=-\dfrac{b}{a}$, produit $=\dfrac{c}{a}$: deux relations qui se lisent sur les coefficients, sans calculatrice.

Exemple 3 : produit $=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{2}=3$.

Exemple 4 : $2\times x_2=3$, donc $x_2=\dfrac{3}{2}=1{,}5$. Réflexe : vérifier avec l'autre relation, $2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}=-\dfrac{-7}{2}=-\dfrac{b}{a}$.

Théorème 4 : au plus deux racines ; quand on en tient deux, la recherche est terminée. Les trois cas : x^2+1 (aucune), $x^2-2x+1=(x-1)^2$ (une, double), $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ (deux).

Anecdote Le nombre d'or φ vérifie $x^2=x+1$: il est racine de x^2-x-1, dont la somme des racines vaut 1 et le produit -1. La seconde racine est donc $1-\varphi$, sans aucun calcul de racine carrée. Al-Khwārizmī, faute d'accepter les nombres négatifs, distinguait six types d'équations là où nous n'en écrivons qu'un. *(calcul à partir du théorème 3 ; al-Khwārizmī,* op. cit.*)*

Forme factorisée — Théorème 5, Définition 3, Exemple 5 *6 min*

Au tableau Le théorème 5 dit qu'il n'y a qu'une factorisation de ce type : c'est pourquoi on dit *la* forme factorisée. Exemple 5 :

$$f(x) = 2\left(x - \tfrac{3}{2}\right)(x-2) \quad \text{puis} \quad 2\left(x^2 - \tfrac{7}{2}x + 3\right) = 2x^2 - 7x + 6.$$

L'erreur numéro 1 de l'année : oublier le a. Le montrer : $\left(x - \tfrac{3}{2}\right)(x-2) = x^2 - \tfrac{7}{2}x + 3$, ce n'est pas $f(x)$.
Exemple illustratif du cours (hors diapositive) : $6x^2 - 18x + 12$ s'écrit aussi $(6x-6)(x-2)$, $(x-1)(6x-12)$ ou $2(3x-3)(x-2)$, mais seule $6(x-1)(x-2)$ est *la* forme factorisée.

Anecdote Descartes parle encore en 1637 de racines « vraies » (positives) et « fausses » (négatives). C'est lui qui fixe l'usage de x, y, z pour les inconnues et de a, b, c pour les grandeurs connues.
(R. Descartes, La Géométrie*, 1637)*

III. Signe — Théorème 6, Exemple 6 *6 min*

Au tableau Deux gestes, dans cet ordre : ranger les racines dans l'ordre croissant, puis lire le signe de a.
Exemple 6 : $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2$, $a = 2 > 0$: $f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1{,}5[\cup]2\,;+\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]1{,}5\,;2[$.
Racine double : l'intervalle du milieu disparaît.

x	$-\infty$		$1{,}5$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Anecdote Galilée établit en 1638 que la trajectoire d'un projectile est une parabole. La portée du saut se lit alors sur l'intervalle où le polynôme de la hauteur est positif : c'est l'atelier du plongeon.
(G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638)*