PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET ARBRES PONDÉRÉS

I. DÉFINITION

II. ARBRES PONDÉRÉS

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. »

— Alexandre Grothendieck

I. Définition

Définition

Soient A et B deux évènements tels que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé est notée $p_A(B)$ et est donnée par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

On dira en abrégé « p de B sachant A » pour $p_A(B)$.

Théorème

Soient A et B deux évènements.

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Exemple 1

Dans un pays, il y a $2\,\%$ de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus. La probabilité qu'une personne ait un test positif sachant qu'elle est contaminée est de $0{,}99$ (pour les futurs soignants, on appelle cette probabilité la *sensibilité* du test). La probabilité qu'une personne qui n'est pas contaminée ait un test négatif est de $0{,}97$ (cette probabilité étant appelée *spécificité* du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note C l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et P l'évènement « le test est positif ».

Quelle est la valeur de $p_C(P)$?

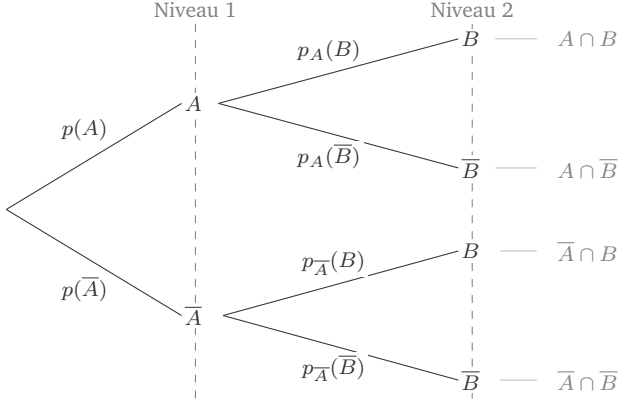
Exemple 2

Dans un pays, il y a $2\,\%$ de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus. La probabilité qu'une personne ait un test positif sachant qu'elle est contaminée est de $0{,}99$ (pour les futurs soignants, on appelle cette probabilité la *sensibilité* du test). La probabilité qu'une personne qui n'est pas contaminée ait un test négatif est de $0{,}97$ (cette probabilité étant appelée *spécificité* du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note C l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et P l'évènement « le test est positif ».

Calculer la probabilité de l'évènement $C \cap P$ et interpréter celle-ci.

II. Arbres pondérés

Arbre pondéré à deux niveaux et deux branches à chaque nœud



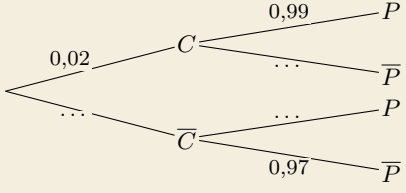
Règle de la somme

La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Exemple 3

Dans un pays, il y a $2\,\%$ de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus. La probabilité qu'une personne ait un test positif sachant qu'elle est contaminée est de $0{,}99$ (pour les futurs soignants, on appelle cette probabilité la *sensibilité* du test). La probabilité qu'une personne qui n'est pas contaminée ait un test négatif est de $0{,}97$ (cette probabilité étant appelée *spécificité* du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note C l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et P l'évènement « le test est positif ».

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités complet.



Règle du produit

La probabilité de l'intersection des évènements rencontrés le long d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

Il s'agit tout simplement du théorème du début : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

Exemple 4

On admet que la probabilité que le test soit positif est $0{,}0492$. Déterminer la probabilité $p_P(C)$ qu'une personne soit contaminée sachant que son test est positif. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible, puis une valeur approchée à 10^{-2}.

Aide au calcul : $198 = 6 \times 33$; $492 = 6 \times 82$; $\dfrac{33}{82} \approx 0{,}402$

Vérification

Partie 1 — le cours qui vient d'être présenté

→ Vérification de la partie 1

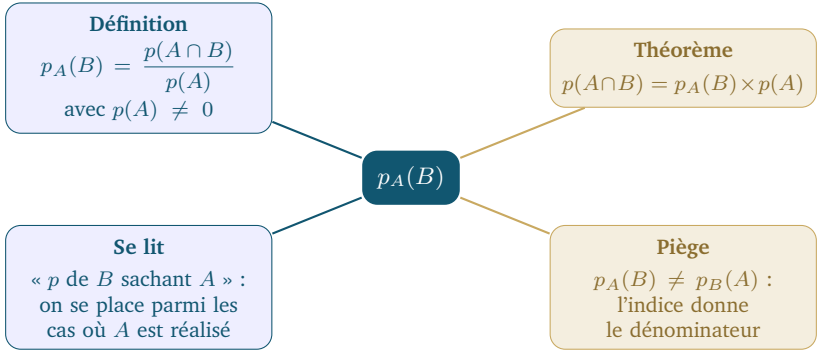
La définition et le théorème, en quatre questions.

Partie 2

Revoir le cours

Une diapositive par partie, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. Définition — l'essentiel

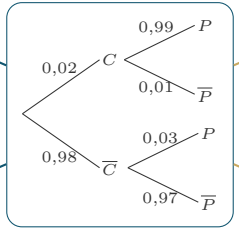


Toute probabilité conditionnelle vérifie $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$.

II. Arbres pondérés — l'essentiel

Règle de la somme
branches d'un même nœud : somme $= 1$

Règle du produit
le long d'un chemin : on multiplie



Chemin
suite de branches ; ici 2 niveaux $\Rightarrow$ 4 chemins

Arbre inverse
$p_P(C)$ n'est pas sur l'arbre : retour à la définition

Une probabilité supérieure à 1 signale toujours une erreur.

Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les quatre exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier A — Flashcards menteuses

Atelier G — Auto-évaluation