ATELIER B

Suites définies par un motif

Objectifs : Déterminer une relation de récurrence et une formule explicite à partir d'un motif géométrique.
Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Observez les trois premiers motifs, puis répondez aux questions sur votre cahier. Le corrigé est à aller chercher une fois le travail terminé.

Énoncé

Le premier motif est composé d'une rangée de deux billes, le deuxième de deux rangées de trois billes, le troisième de trois rangées de quatre billes, etc.
On note u_n le nombre de billes du motif n, pour n entier naturel non nul : $u_1 = 2$, $u_2 = 6$ et $u_3 = 12$.



motif 1 ($u_1 = 2$) motif 2 ($u_2 = 6$) motif 3 ($u_3 = 12$)

1. Calculer u_4 et u_5 (dessiner au brouillon si besoin).

2. Calculer u_6 et u_7, sans dessin.

3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, dire parmi les expressions suivantes de u_{n+1} en fonction de u_n lesquelles semblent correctes.

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \quad u_{n+1} = u_n + (n+2) \quad u_{n+1} = u_n + n \quad u_{n+1} = u_n + 2n$$

4. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, dire parmi les expressions suivantes de u_n en fonction de n lesquelles semblent correctes.

$$u_n = n^2 + n + 1 \quad u_n = 2n^2 \quad u_n = n(n+1) \quad u_n = n(n-1)$$

★ AIDES ★

1. Combien y a-t-il de rangées dans le motif n ? Combien de billes par rangée ? Comptez précisément sur les dessins des motifs 1, 2 et 3.

2. Le motif n est composé de n rangées de $(n+1)$ billes. Utilisez cette description pour imaginer le motif 4, puis le motif 5. *Valeur de contrôle* : $u_4 = 20$.

3. Testez chaque expression avec $n = 1$, puis avec $n = 2\ldots$ pour éliminer celles qui sont fausses.

Pour aller plus loin : pour passer du motif n au motif $n+1$, on ajoute $n+1$ billes en haut, puis $n+1$ billes à droite. Ci-dessous, le passage du motif 3 au motif 4 :



Combien de rangées de combien de billes obtient-on après l'ajout du haut ? Combien de billes a-t-on ajoutées en tout ?

4. **Question 4** — Remplacez n par une petite valeur (par exemple $n = 2$) dans chaque proposition et comparez avec $u_2 = 6$: cela élimine des expressions sans tout démontrer.