Corrigé

1. Le motif n compte n rangées de $(n+1)$ billes. Le motif 4 a donc 4 rangées de 5 billes, le motif 5 en a 5 de 6.

$$u_4 = 4 \times 5 = 20 \qquad u_5 = 5 \times 6 = 30$$

2. $u_6 = 6 \times 7 = 42$ $\qquad$ $u_7 = 7 \times 8 = 56$

3. On compare chaque expression à u_{n+1} ; une valeur fausse suffit à l'éliminer.

n	1	2	3
u_{n+1} attendu	$u_2 = 6$	$u_3 = 12$	$u_4 = 20$
$u_n + 2(n+1)$	$2+4=6$ ✓	$6+6=12$ ✓	$12+8=20$ ✓
$u_n + (n+2)$	$2+3=5$ ×	$6+4=10$ ×	$12+5=17$ ×
$u_n + n$	$2+1=3$ ×	$6+2=8$ ×	$12+3=15$ ×
$u_n + 2n$	$2+2=4$ ×	$6+4=10$ ×	$12+6=18$ ×

La première convient aussi pour $n = 4$, 5, 6 (30, 42, 56) ; vérifiée sur quelques valeurs seulement, elle *semble* correcte :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 2(n+1)}$$

Pour aller plus loin : le motif n compte n rangées de $(n+1)$ billes. En ajoutant $n+1$ billes en haut, on obtient $n+1$ rangées de $n+1$ billes. En ajoutant ensuite $n+1$ billes à droite, une au bout de chaque rangée, on obtient $n+1$ rangées de $n+2$ billes : c'est le motif $n+1$.



motif 3 — 4 rangées de 4 — motif 4

On a ajouté $(n+1)+(n+1) = 2(n+1)$ billes, ce qui *explique* la relation conjecturée.

4. On compare de même chaque expression à u_n.

n	1	2	3
u_n attendu	$u_1 = 2$	$u_2 = 6$	$u_3 = 12$
n^2+n+1	$1+1+1=3$ ×	$4+2+1=7$ ×	$9+3+1=13$ ×
$2n^2$	$2\times1=2$ ✓	$2\times4=8$ ×	$2\times9=18$ ×
$n(n+1)$	$1\times2=2$ ✓	$2\times3=6$ ✓	$3\times4=12$ ✓
$n(n-1)$	$1\times0=0$ ×	$2\times1=2$ ×	$3\times2=6$ ×

Piège : $2n^2$ convient pour $n = 1$ mais pas pour $n = 2$; un seul essai ne suffit pas pour conserver une expression. L'expression $n(n+1)$ convient jusqu'à $n = 7$ ($7 \times 8 = 56$) : c'est la description du motif, n rangées de $(n+1)$ billes.

$$\boxed{u_n = n(n+1)}$$

Cohérence des questions 3 et 4 : $u_{n+1} - u_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = 2(n+1)$.