Les suites : modes de génération et sens de variation

Cours

« Je pense que ce qui compte, ce n'est pas tant ce que l'on apprend réellement en classe, mais plutôt ce qui nous motive à continuer à faire les choses par nous-mêmes. »

Maryam Mirzakhani

Tout commence par un simple jeu : trouver la suite. Par exemple : $0-1-4-9-\ldots$ Ou encore : $1-2-4-7-\ldots$ Ces suites sont définies par une certaine logique qu'il faut trouver, c'est en cela que réside le jeu.

Et puis voilà que quelqu'un sort du jeu et se demande : mais c'est quoi en fait une suite ? Ce sont des nombres qui se suivent, autrement dit un ensemble de nombres. Mais c'est pas assez précis. Les nombres se suivent, donc ils ont un ordre, c'est un ensemble ordonné de nombres. C'est mieux, mais il manque une idée : ça ne s'arrête pas. C'est donc un ensemble infini et ordonné de nombres. N'importe quels nombres ? A priori oui, pas de restriction : **une suite est un ensemble infini et ordonné de nombres réels**. C'est pas mal ça. On a dépassé largement le cadre du jeu. On voit naître un nouvel objet mathématique. Son nom est « suite », « **suite de nombres réels** » pour être précis.

La réflexion sur ce nouvel objet se poursuit : ordonné, ça veut dire quoi exactement ? Qu'il y a un premier, puis un deuxième, puis... Ok, on a compris. On peut leur donner un numéro en gros. Ah mais oui, il faudrait pouvoir les numéroter ces nombres, pour s'y retrouver.

Résumons le vocabulaire et les notations à inventer pour aller avec notre nouvel objet : il faudrait une notation pour l'objet lui-même, la suite (son nom, on l'a déjà) ; il faudrait un nom et une notation pour les éléments de la suite, les nombres ; et il faudrait en même temps une astuce pour que ces nombres soient numérotés, qu'on sache quel est le premier, quel le deuxième, quel est le huitième, etc.

I. Calculer les termes d'une suite

A. Définir une suite

La **suite** elle-même peut être notée par une lettre comme u. On peut utiliser n'importe quelle lettre pour désigner une suite : u, v, w, a, b...

Les valeurs de la suite sont appelées ses **termes** et le numéro d'un terme est appelé son **rang**. On commence la plupart du temps à 0 ou à 1. Chaque terme d'une suite u peut alors être noté u_n (notation du rang en indice) ou bien $u(n)$ (notation à la façon des fonctions).

Pour la suite des carrés parfaits, on peut numéroter à partir de 0 :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 4, \quad \ldots$$

et de façon générale, pour tout entier naturel n :

$$u_n = n^2$$

Si on avait numéroté à partir de 1, cela aurait donné : $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$ et de façon générale $u_n = (n-1)^2$, bien moins naturel et pratique.

En résumé :

Numérotation (rang)	0	1	2	3	...	n	...
Suite u	$u_0 = 0$	$u_1 = 1$	$u_2 = 4$	$u_3 = 9$	...	$u_n = n^2$	...

Pour la suite $1-2-4-7-11-\ldots$, on peut commencer par noter $u_1 = 1$ puis on a :

$$u_2 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$u_3 = u_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$
$$u_4 = u_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$
$$\vdots$$

et on poursuit avec la règle de calcul suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + n$$

Cette règle peut aussi être écrite ainsi $u_n = u_{n-1} + (n-1)$, pour $n \geqslant 2$, mais la précédente est un peu plus simple à utiliser.

En résumé :

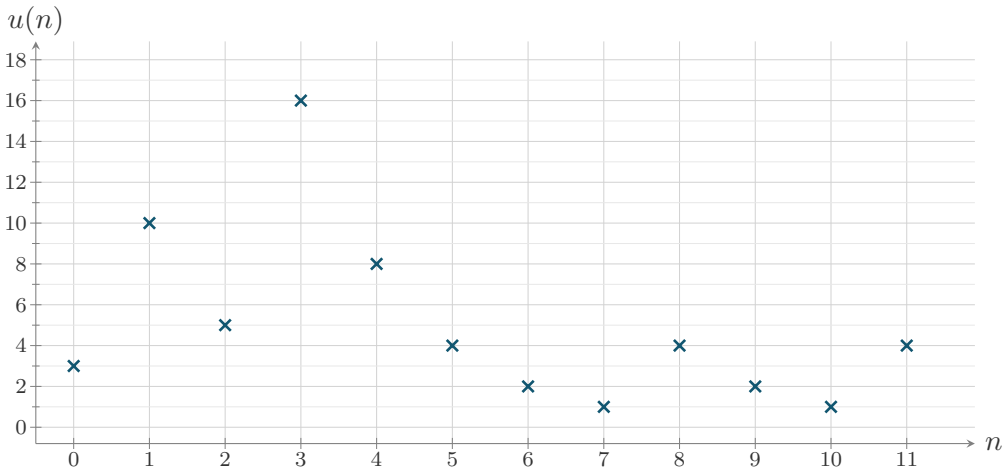
Numérotation (rang)	1	2	3	4	…	n	$n+1$	…
Suite u	$u_1 = 1$	$u_2 = 2$	$u_3 = 4$	$u_4 = 7$	…	u_n	$u_{n+1} = u_n + n$	…

Mathématiquement, une suite est ainsi tout simplement une fonction qui, à tout entier naturel n, associe un nombre réel.

Définition 1. Une **suite** est une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou à partir d'un certain entier).

B. Voir une petite suite c'est agréaAAble

On peut compléter notre découverte des suites avec une vision plus globale grâce à une représentation graphique : une suite étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, elle peut être **représentée** par un « nuage de points » (un ensemble de points) avec en abscisse le rang n et en ordonnée le terme de la suite de rang n.
Par exemple :



Représentation graphique de la suite de Syracuse commençant par 3.

C. D'un coup ou l'un après l'autre

Jusqu'ici, nous avons donc mis en évidence deux façons de définir précisément une suite :

- **par une formule explicite (ou terme général) : u_n en fonction de n directement**
  Chaque terme étant exprimé en fonction de n, on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement.

Exemple 1. La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 1$. Calculer u_2.

Solution. Le terme général donné permet de calculer n'importe quel terme directement :

$$\begin{aligned} u_2 &= 3 \times 2 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

En conclusion : $u_2 = 5$.

- **par une relation de récurrence : u_{n+1} en fonction de u_n**
  Chaque terme étant exprimé en fonction du précédent, pour calculer un terme, il faut avoir calculé les précédents.

Exemple 2. La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 3v_n - 1$. Calculer v_2.

Solution. D'après la relation de récurrence, v_0 permet de calculer v_1 et v_1 permet de calculer v_2 donc il faut d'abord calculer v_1 pour pouvoir ensuite calculer v_2 :

$$\begin{aligned} v_1 &= 3v_0 - 1 \\ &= 3 \times 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Calculons maintenant v_2 :

$$\begin{aligned} v_2 &= 3v_1 - 1 \\ &= 3 \times (-1) - 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

En conclusion : $v_2 = -4$.

On pourra rencontrer à l'occasion deux autres façons de définir une suite : **par un algorithme ou un programme**, et **par des motifs géométriques**. Mais ces deux façons s'apparentent en réalité la plupart du temps à une définition par une relation de récurrence ou par un terme général.

II. Sur le sens de variations des suites

Une fonction peut être croissante sur un intervalle puis décroissante sur un autre. C'est plus simple avec les suites. Elles sont soit croissantes (sous-entendu de partout), soit décroissantes (sous-entendu de partout), soit ni l'un ni l'autre. Une suite est croissante si chaque terme est supérieur ou égal au précédent, décroissante si chaque terme est inférieur ou égal au précédent. On peut préciser un cas particulier : une suite est constante si tous ses termes sont identiques. On introduit alors la notion de monotonie pour indiquer qu'une suite est soit croissante, soit décroissante : celle-ci n'ayant pas de changement de variations, on dit qu'elle est monotone et on pourra apprécier la sensibilité de celui qui est à l'origine du choix du vocabulaire.

Définition 2. Soit u une suite.

La suite u est **croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est **strictement croissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

La suite u est **décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite u est **strictement décroissante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

La suite u est **constante** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite **monotone** est une suite croissante ou une suite décroissante. Une suite **strictement monotone** est une suite strictement croissante ou une suite strictement décroissante.

Il y a donc, concernant les variations, uniquement trois types de suites :

- les suites croissantes ;
- les suites décroissantes ;
- et les suites qui ne sont pas monotones (elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes).

Si une suite admet comme termes consécutifs 10 puis 5, on en déduit que cette suite n'est pas croissante (mais elle peut être décroissante ou ne pas être monotone). De la même façon, si 2 et 7 sont deux termes consécutifs d'une suite, on peut en déduire qu'elle n'est pas décroissante.

En résumé, pour démontrer qu'une suite n'est pas croissante, ou qu'elle n'est pas décroissante, on peut utiliser deux termes consécutifs bien choisis.

Exemple 3. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 3$.

Solution. Calculons les premiers termes de la suite u :

$$u_0 = 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 3$$
$$u_1 = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$$

donc $u_1 < u_0$ et la suite n'est pas croissante.

$$u_2 = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$$
$$u_3 = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 0$$

donc $u_3 > u_2$ et la suite n'est pas décroissante.

En conclusion, la suite u n'est pas monotone.

Attention toutefois : connaître seulement les premiers termes d'une suite ne permet pas de conclure qu'elle est monotone. Par exemple, si l'on connaît uniquement les termes $u_0 = 10$, $u_1 = 7$ et $u_2 = 3$, on peut penser que la suite est décroissante. Pourtant, il est tout à fait possible que le terme suivant soit supérieur à 3 : dans ce cas, la suite ne serait plus décroissante et ne serait donc pas monotone. Avec ces seules informations, la seule conclusion certaine est que la suite n'est pas croissante.

Pour démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante, il ne suffit donc pas d'observer ses premiers termes. Il faut prouver que **tous** les termes de la suite, en nombre infini, sont ordonnés dans le même sens. C'est pourquoi on utilise le calcul littéral : il permet de comparer, pour tout entier n, le terme u_n au terme suivant u_{n+1}, et ainsi d'établir avec certitude la monotonie de la suite.

En résumé, pour démontrer qu'une suite est croissante ou qu'elle est décroissante, on doit utiliser le calcul littéral et on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

- **comparer directement** u_{n+1} **et** u_n (voir les définitions) ;
- **étudier le signe de** $u_{n+1} - u_n$ ($u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$ et $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$).

Exemple 4. Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3 + 5n$.

Solution. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(-3 + 5(n+1)\big) - (-3 + 5n) \\ &= (5n + 2) + 3 - 5n \\ &= 5 > 0 \end{aligned}$$

donc

$$u_{n+1} > u_n$$

et ainsi

la suite u est strictement croissante.

- **si** $u_n > 0$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, comparer le rapport** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **et 1** (si $u_n > 0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \iff u_{n+1} < u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff u_{n+1} > u_n$).

Exemple 5. Étudier le sens de variation de la suite strictement positive u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n \times 0{,}8$.

Solution. La suite étant strictement positive, on peut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}8 < 1$$

donc

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{(car } u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\text{)}$$

et ainsi

la suite u est strictement décroissante.