TRIGONOMÉTRIE

Cours

« Réfléchissez, pensez, utilisez votre tête. Ne répétez pas des formules apprises par cœur »

Gert Martin Greuel

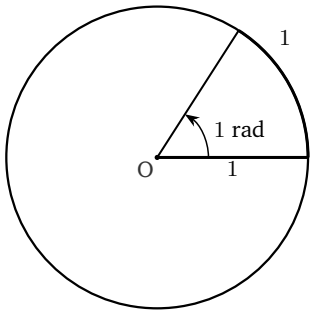
Dans ce chapitre, nous allons définir une nouvelle unité de mesure des angles, aborder intuitivement la notion d'angle orienté, et redéfinir le sinus et le cosinus en étendant les définitions du collège pour ne plus être limité aux seuls angles aigus.

I. LE RADIAN

Définition 1. Dans un repère orthonormé d'origine O, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

Le radian est l'unité de mesure des angles du système international d'unités (SI).

Définition 2. Le **radian**, noté rad, est la mesure d'un angle qui intercepte sur le cercle trigonométrique un arc de longueur 1.

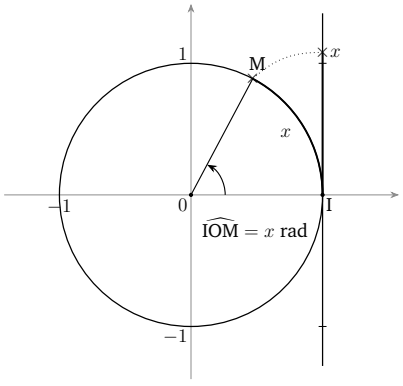


Voyons comment comprendre cette unité de mesure des angles.

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = 1$ (voir ci-dessous). En « enroulant » cette droite graduée à partir du point $\mathrm{I}(1\,;0)$ sur le cercle trigonométrique (illustration en animation) :

- à tout réel x est associé un seul point M du cercle trigonométrique ;
- à tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels.

Définition 3. On appelle **mesure en radian** de l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ tout nombre réel x associé au point M.



Cette définition appelle trois remarques :

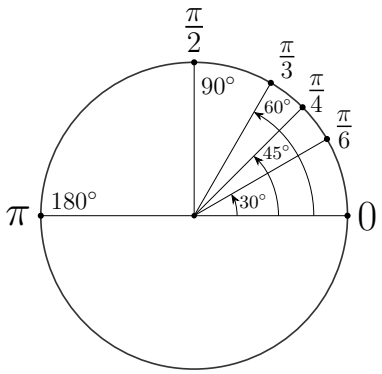
- la mesure en radian d'un angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ compris entre $0°$ et $360°$ ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) correspond donc à la longueur de l'**arc de cercle** IM ;
- l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ est ainsi « **orienté** » de I vers M : si M′ est le symétrique de M par rapport à (OI), l'angle $\widehat{\mathrm{IOM'}}$ a pour mesure $-x$;
- une mesure en radian est par définition un nombre réel (donc **sans unité**) : $x\,\text{rad} = x$. L'unité pourra donc ne pas être écrite.

Théorème 1. $360° = 2\pi$ rad $\qquad 180° = \pi$ rad $\qquad 90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad

Démonstration. $360°$ correspond au tour complet du cercle. Or le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π. D'où la première égalité. Les autres correspondent à la longueur du demi-cercle trigonométrique et à celle du quart de cercle trigonométrique.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité. Il donne les mesures les plus utilisées. Il faut les connaître par cœur.

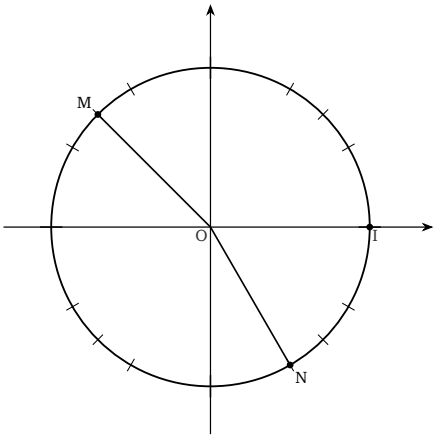
Mesure en degré	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
Mesure en radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π



Démonstration. Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés : $90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad donc la moitié donne $45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad, le tiers donne $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad et les deux tiers $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

Exemple 1. Marquer sur le cercle trigonométrique le point M correspondant à $\dfrac{3\pi}{4}$ et le point N correspondant à $-\dfrac{\pi}{3}$.

Solution. Voir la figure ci-contre.



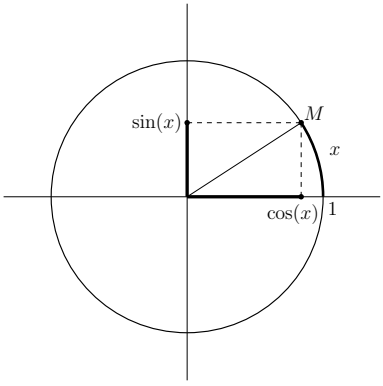
II. Le cosinus et le sinus d'un réel

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle et l'hypoténuse et le sinus d'un angle aigu est égal au rapport entre la longueur du côté opposé à l'angle et l'hypoténuse. Ces définitions sont possibles parce que ces rapports trigonométriques ne dépendent que des angles et non des longueurs des côtés. Mais elles ne sont valables que pour des angles aigus. Nous allons étendre ces définitions à tous les angles grâce au cercle trigonométrique.

Définition 4. Soient x un réel et $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}\,;y_\mathrm{M})$ le point du cercle trigonométrique associé à x.

On appelle **cosinus de x** l'abscisse de M et **sinus de x** l'ordonnée de M.

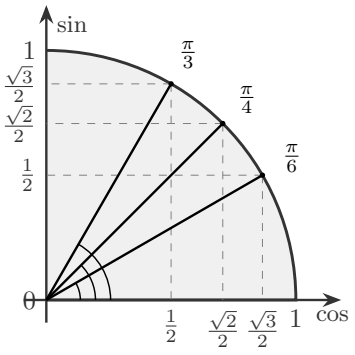
$$\cos(x) = x_\mathrm{M} \quad \text{et} \quad \sin(x) = y_\mathrm{M}$$



Lorsque $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (angle aigu), cette définition correspond alors à celle du cosinus dans un triangle rectangle. En effet, l'hypoténuse du triangle rectangle est alors le rayon du cercle trigonométrique et vaut donc 1.

Quelques valeurs remarquables de sinus et de cosinus doivent être connues.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

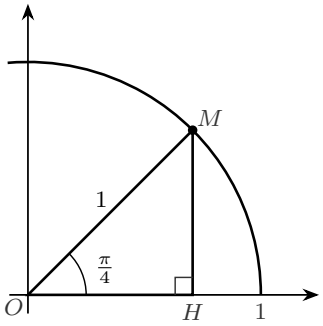


Démonstrations au programme. Les cosinus et sinus des cas $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ s'obtiennent facilement.

Si $x = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$, le triangle rectangle OHM est isocèle en H et le théorème de Pythagore donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = x_{\mathrm{M}} = y_{\mathrm{M}} = \mathrm{OH} = \mathrm{HM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La démonstration est similaire si $x = \frac{\pi}{6}$ $(30°)$.



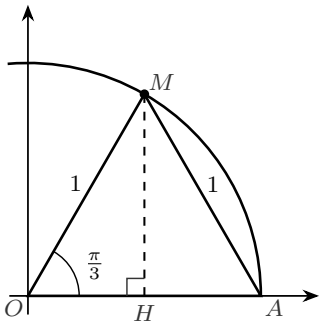
Si $x = \frac{\pi}{3}$ $(60°)$, le triangle OAM est équilatéral donc H est le milieu de [OA] ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x_{\mathrm{M}} = \mathrm{OH} = \frac{1}{2}.$$

En appliquant ensuite le théorème de Pythagore dans OMH, on obtient : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = y_{\mathrm{M}} = \mathrm{HM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

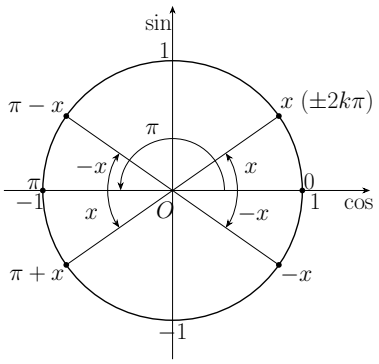
Enfin, le triangle OHM est égal à celui de la démonstration ci-dessus en permutant les côtés OH et HM ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$



Théorème 2. Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$$\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$



Démonstration. Notons M le point associé à x.

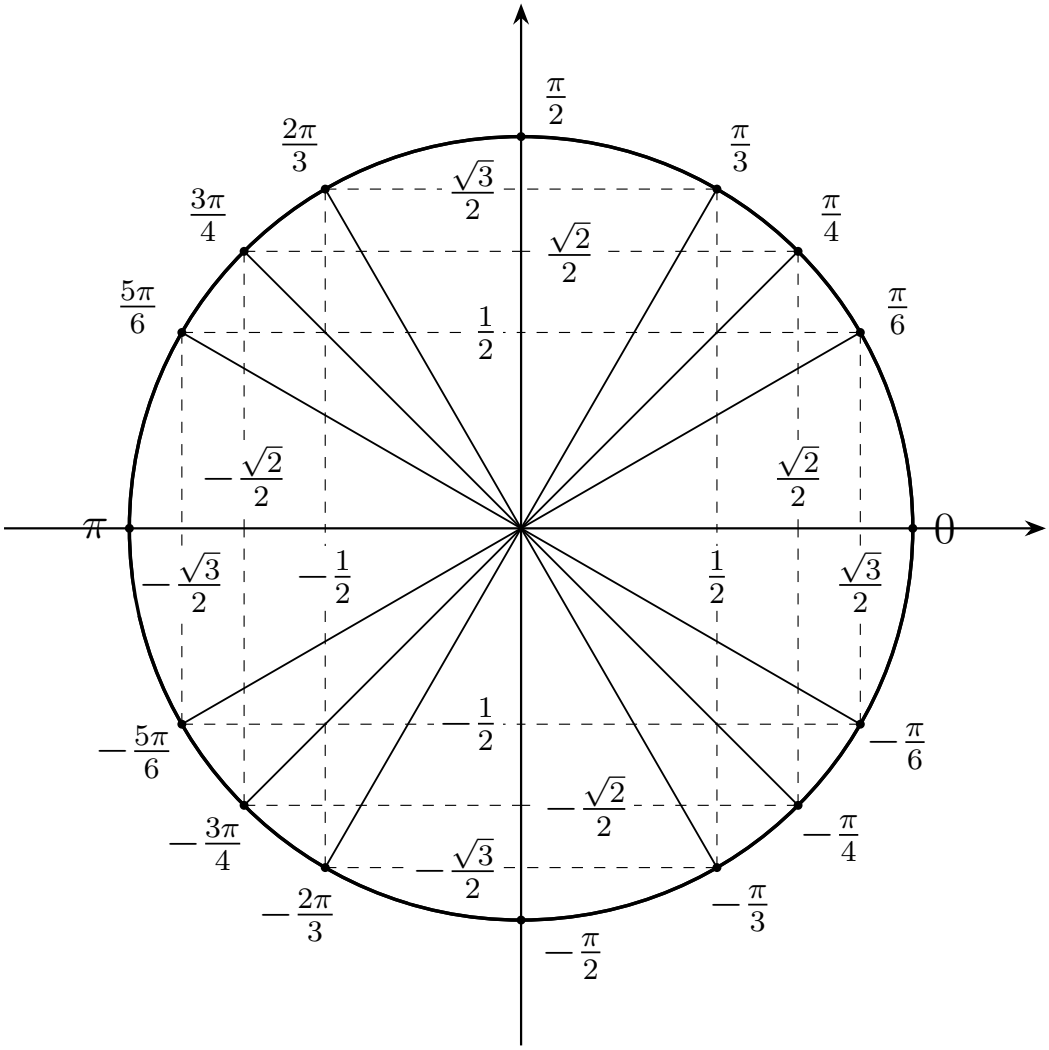
Le point associé à $x + k \times 2\pi$ est M lui-même (définition 3) : ses coordonnées sont inchangées.

Le point associé à $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses : son abscisse est inchangée, son ordonnée est changée en son opposée.

Le point associé à $\pi - x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées : son abscisse est changée en son opposée, son ordonnée est inchangée.

Le point associé à $\pi + x$ est le symétrique de M par rapport à O : ses deux coordonnées sont changées en leurs opposées.

Cercle trigonométrique avec valeurs remarquables à savoir retrouver



Exemple 2. Par lecture du cercle trigonométrique, donner $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Solution. Le point associé à $\frac{2\pi}{3}$ est le symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, du point associé à $\frac{\pi}{3}$: son ordonnée est inchangée et son abscisse est changée en son opposée. Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemple 3. Par lecture du cercle trigonométrique, donner $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Solution. Les points associés à $-\frac{\pi}{4}$ et à $\frac{5\pi}{6}$ sont les symétriques du point associé à $\frac{\pi}{4}$, respectivement par rapport à l'axe des abscisses, et du point associé à $\frac{\pi}{6}$, par rapport à l'axe des ordonnées. Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.