Séance 1 — 45 min. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier.

Titre — le plan du chapitre — *1 min*

Au tableau Le plan en deux lignes : I. Le radian ; II. Le cosinus et le sinus d'un réel.

Page de garde — Partie 1 — *1 min*

Anecdote **[attestation incertaine]** Le partage du tour en 360 degrés remonte aux astronomes de Mésopotamie, qui comptaient en base soixante ; il passe ensuite à l'astronomie grecque. Pourquoi 360 ? On invoque les nombreux diviseurs de 360, ou l'année d'environ 360 jours : aucune source ne tranche. À présenter comme une hypothèse. *(O. Neugebauer,* The Exact Sciences in Antiquity*, 1957 ; la raison du choix n'est attestée par aucun texte)*

I. Le radian — Définitions 1 et 2 — *5 min*

Au tableau Un tour complet intercepte tout le cercle, de longueur $2 \times \pi \times 1 = 2\pi$: il mesure donc 2π rad. Comme $2\pi \approx 6{,}28$, le cercle contient un peu plus de six arcs de longueur 1.

Anecdote Le mot « radian » apparaît imprimé pour la première fois en 1873, dans des sujets d'examen posés par James Thomson au Queen's College de Belfast ; il était le frère de William Thomson, futur Lord Kelvin. La mesure elle-même est bien plus ancienne : Roger Cotes l'utilisait dès 1714. *(F. Cajori,* A History of Mathematical Notations*, vol. 2, 1929)*

I. Le radian — Définition 3, l'enroulement — *7 min*

Au tableau Un même point M, atteint par plusieurs réels :

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}.$$

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ et $-\frac{7\pi}{4}$ sont trois mesures en radian de $\widehat{\text{IOM}}$: les deux premières dans le sens direct, la dernière dans le sens des aiguilles d'une montre.

I. Le radian — Théorème 1, tableau, Exemple 1 — *8 min*

Au tableau Conversions par proportionnalité ($180° = \pi$ rad) :

$$135° = \frac{135}{180} \times \pi = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \times 180° = 120°.$$

Exemple 1 : $\frac{3\pi}{4} = 135°$: M s'obtient en partant de I dans le sens direct, trois pas de $\frac{\pi}{4}$; il est dans le deuxième quadrant. $-\frac{\pi}{3} = -60°$: N s'obtient en partant de I dans le sens des aiguilles d'une montre ; il est sous l'axe des abscisses.

Anecdote Le symbole π est employé pour ce nombre par William Jones en 1706, dans son *Synopsis Palmariorum Matheseos*. C'est Euler qui l'impose, en l'adoptant notamment dans l'*Introductio in analysin infinitorum* (1748). *(F. Cajori,* A History of Mathematical Notations*, vol. 2, 1929)*

II. Le cosinus et le sinus d'un réel — Définition 4 — *5 min*

Au tableau Deux lectures directes sur le cercle :

$$x = \frac{\pi}{2} \ : \ \mathrm{M}(0\,;1),\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad x = \pi \ : \ \mathrm{M}(-1\,;0),\ \cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0.$$

Anecdote Le mot « sinus » vient d'une suite de traductions : le sanskrit *jyā* (la corde de l'arc) devient *jība* en arabe, écrit sans voyelles et relu *jayb*, « le pli », que les traducteurs latins du XII$^{\text{e}}$ siècle rendent par *sinus*, qui a le même sens. *(E. Maor,* Trigonometric Delights*, 1998)*

II. Le cosinus et le sinus d'un réel — Les valeurs remarquables *4 min*

Au tableau Toujours écrire le cosinus *de quoi* :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Anecdote « Cosinus » est l'abréviation de *complementi sinus*, le sinus de l'angle complémentaire. On doit la forme *co.sinus* à Edmund Gunter, en 1620. *(E. Maor,* Trigonometric Delights*, 1998)*

II. Le cosinus et le sinus d'un réel — Les démonstrations au programme *6 min*

Au tableau Pour $x = \frac{\pi}{4}$, OHM est rectangle isocèle en H : $\text{OH} = \text{HM} = c$ et, par Pythagore, $c^2 + c^2 = 1$, soit $c^2 = \frac{1}{2}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{3}$, OAM est équilatéral, donc H est le milieu de [OA] et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; par Pythagore dans OHM :

$$\text{HM}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad \text{donc} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Anecdote Ptolémée, dans l'*Almageste* (II^e^ siècle), bâtit sa table des cordes à partir des mêmes figures : côtés du triangle équilatéral, du carré et de l'hexagone inscrits dans un cercle. *(Ptolémée,* Almageste*, livre I, ch. 10 ; trad. G. J. Toomer, 1984)*

II. Le cosinus et le sinus d'un réel — Théorème 2, Exemples 2 et 3 *7 min*

Au tableau Exemple 2 : $\frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 3 : les points de $-\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Donc

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$