Dérivation : point de vue local

Cours

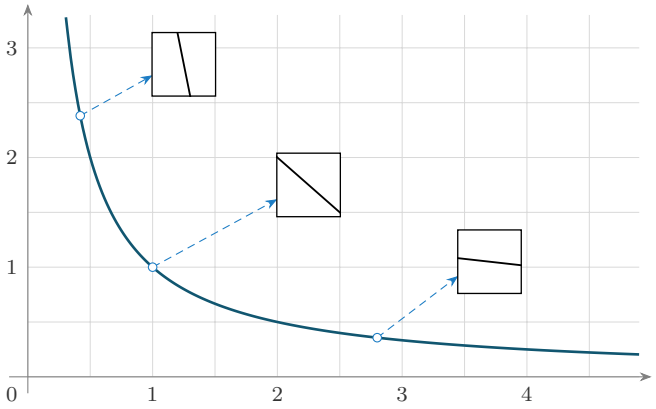
« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. »

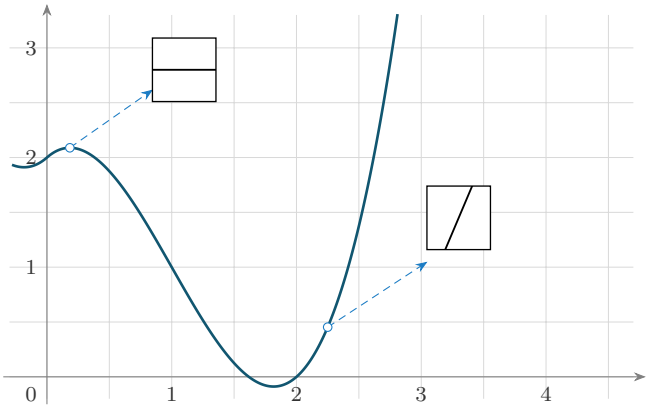
Alexandre Grothendieck

La pente d'une droite, son coefficient directeur, c'est une notion bien connue, c'est entendu. Mais si on veut essayer de généraliser à d'autres courbes, c'est tout de suite une autre paire de manches. D'abord, une courbe (on supposera pour simplifier le propos qu'on exclut les droites), ça change constamment : ça peut être par endroits très pentu, et pas du tout à d'autres. Parfois ça descend, parfois ça monte. Ce n'est pas fixé comme pour une droite.

La pente n'est pas la même partout, c'est sûr. Pourtant, on sent bien qu'à un endroit précis, une courbe monte ou descend et elle est plus ou moins pentue. **La pente d'une courbe dépend du point que l'on choisit pour l'analyser.**

Pour mieux comprendre l'idée de pente, prenons des courbes et observons-les. En voici deux ci-dessous (d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$), mais on peut bien sûr le faire avec toutes celles qu'on connaît. Choisissons quelques lieux et zoomons sur chacun d'eux, zoomons, zoomons...





Voilà qui est pour le moins inattendu : à chaque fois, en zoomant suffisamment sur un point, on dirait qu'on obtient... une droite. Ce n'est pas vraiment une droite bien sûr, puisque c'est une courbe. Mais ça s'en rapproche. Sacrément même. Si on zoome assez, on ne peut pas faire la différence : la courbe devient presque droite. On part alors de cette idée que **la pente d'une courbe (en un point), c'est la pente de la droite obtenue en zoomant indéfiniment sur ce point**, et on l'obtient à partir du calcul de la pente d'une sécante à la courbe.

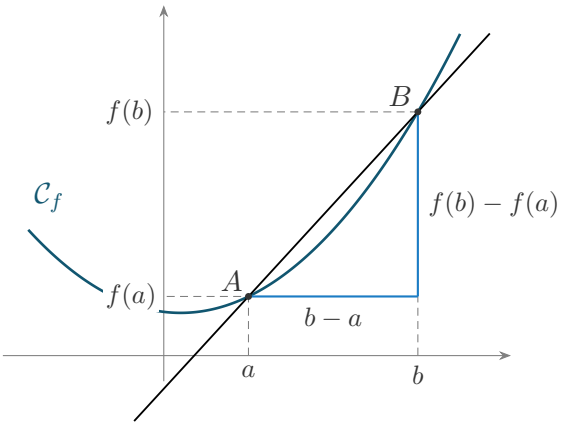
I. Taux de variation d'une fonction et sécante à une courbe

Définition 1. Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux réels appartenant à I.

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ce taux de variation est la **pente** (ou coefficient directeur) **de la sécante** à la courbe représentative de f passant par les points de la courbe d'abscisses a et b.



Exemple 1. Calculer le taux de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) entre 1 et 5. En déduire la pente de la sécante (AB) où $A(1\,;1)$ et $B(5\,;25)$.

Solution. Le taux vaut, par définition : $\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{5^2-1^2}{5-1} = \dfrac{24}{4} = 6$.

Les points $A(1\,;1)$ et $B(5\,;25)$ sont les points de la courbe d'abscisses 1 et 5 : la pente de la sécante (AB) est donc 6.

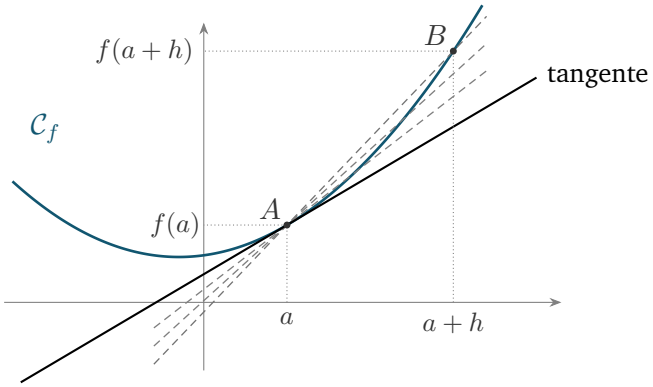
II. Nombre dérivé d'une fonction en un réel et tangente à une courbe en un point

En posant $b = a + h$, le taux s'écrit $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

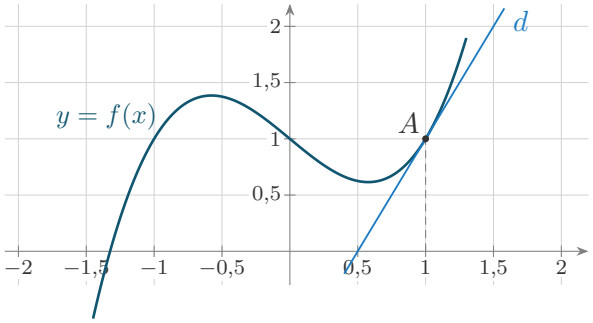
Définition 2. Lorsque h se rapproche de 0, si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre réel, on dit alors que f est **dérivable en a** et ce nombre est appelé **nombre dérivé de f en a** et noté $f'(a)$.

En liaison avec les autres disciplines, on rencontre aussi les notations $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pour désigner un taux de variation et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour désigner un nombre dérivé. Si l'on note $y = f(x)$, on peut ainsi écrire $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, en adaptant les lettres selon le contexte.

Définition 3. Soit f une fonction dérivable en a et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. La **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A et de pente $f'(a)$. C'est la « limite des sécantes » (AB) lorsque le point B se rapproche du point A.



Exemple 2. On a tracé la courbe représentative d'une fonction f et sa tangente en A, le point de la courbe d'abscisse 1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.



Solution. Le nombre dérivé de f en 1 est le coefficient directeur de la tangente en A.

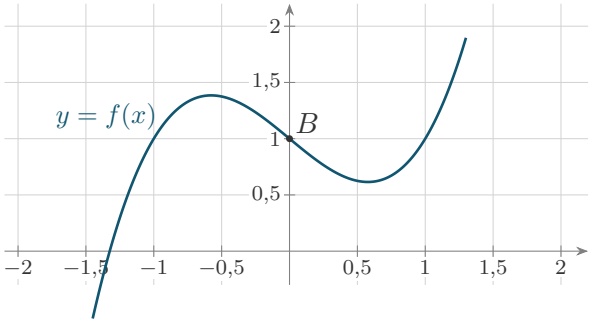
La droite d semble passer par les points de coordonnées $(0{,}5\,;0)$ et $(1\,;1)$, ce qui donne un coefficient directeur environ égal à $\dfrac{1-0}{1-0{,}5} = 2$.

Graphiquement, le nombre dérivé de f en 1 est environ 2.

Attention : la droite d passe par deux points dont un seul, A, est sur la courbe : le point de coordonnées $(0{,}5\,;0)$ n'y est pas. On calcule le coefficient directeur d'une droite, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, et non le taux de variation de f, qui n'utilise que des points de la courbe.

Exemple 3. On a tracé la courbe représentative d'une fonction f. On donne $f'(0) = -1$.

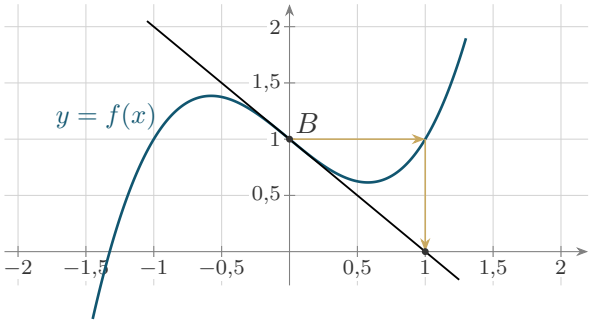
Construire la tangente à la courbe en B.



Solution. Près de B, la courbe se confond avec sa tangente (effet de zoom). Ici, la courbe descend en B, donc la tangente descend aussi.

$f'(0) = -1$ est la pente de la tangente en B. Depuis $B(0\,;1)$, on avance de 1 et on descend de 1 : on arrive au point $(1\,;0)$.

La tangente en B est la droite passant par B et par le point $(1\,;0)$.



Il existe des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points.

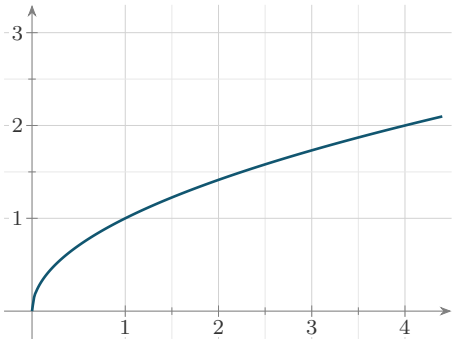
Théorème 1. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

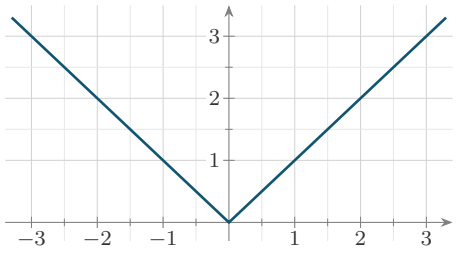
Démonstration. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Pour $h > 0$, le taux de variation de f entre 0 et h est :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Lorsque h se rapproche de 0, $\sqrt{h}$ se rapproche de 0 donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient aussi grand qu'on veut (pour $h = 0{,}01$, il vaut 10 ; pour $h = 0{,}0001$, il vaut $100\ldots$) : le taux de variation ne se rapproche d'aucun nombre réel.

La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0 : sa courbe « devient verticale » à l'origine.





La fonction valeur absolue n'est pas non plus dérivable en 0 mais pour une autre raison. Comme $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$, si $b < 0$, le taux de variation entre 0 et b vaut -1 et si $b > 0$, le taux de variation entre 0 et b vaut 1 : sur la courbe représentative, en 0, on aura beau zoomer, la courbe ressemblera toujours à un « v », jamais à une droite : elle n'admet pas de tangente en 0.

Théorème 2. Soient f une fonction dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Démonstration. $f'(a)$ est la pente de la tangente donc son équation réduite $y = mx + p$ est de la forme :

$$y = f'(a)\,x + p \qquad (1)$$

Il reste à déterminer p. Mais la tangente passe par le point A. Ses coordonnées $\big(a\,;f(a)\big)$ vérifient donc l'équation (1), ce qui donne :

$$f(a) = f'(a) \times a + p.$$

On obtient ainsi $p = f(a) - f'(a) \times a$, que l'on peut injecter dans l'équation (1) :

$$y = f'(a)\,x + f(a) - f'(a) \times a$$

et après réorganisation et factorisation par $f'(a)$, on obtient l'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemple 4. Déterminer l'équation réduite de la tangente en 2 à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 1$, sachant que $f'(2) = 8$.

Solution. On calcule : $f(2) = 2 \times 2^2 - 1 = 7$ et $f'(2) = 8$.

D'après le théorème précédent, la tangente en 2 admet pour équation :

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \iff y = 7 + 8(x - 2) \iff y = 8x - 9.$$

L'équation réduite de la tangente en 2 à la courbe est : $y = 8x - 9$.

III. Approximation affine

Définition 4. Soit f une fonction dérivable en a. La fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée **fonction affine tangente** de f au voisinage de a. Pour h proche de 0, on peut ainsi approcher $f(a+h)$ par :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h.$$

C'est l'idée même de l'introduction du chapitre : en zoomant suffisamment près du point A, la courbe se confond avec sa tangente. L'approximation affine consiste à remplacer, au voisinage de a, la fonction f par la fonction affine dont la courbe représentative est justement cette tangente.

Exemple 5. Soit f la fonction racine carrée, définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On a $f(1) = 1$ et on admet que $f'(1) = 0{,}5$. Donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02}$.

Solution. On pose $a = 1$ et $h = 0{,}02$, de sorte que $1{,}02 = a + h$. D'après l'approximation affine, $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h$, donc

$$\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}5 \times 0{,}02 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01.$$

(À la calculatrice, $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}00995$: l'approximation est très bonne car h est proche de 0.)

Pour conclure sur ce point de vue local de la dérivation, le taux de variation et le nombre dérivé peuvent être illustrés dans des contextes variés :

- en géométrie, le taux de variation représente la pente d'une sécante tandis que le nombre dérivé représente la pente d'une tangente ;
- en cinématique (étude physique des mouvements), le taux de variation peut être interprété comme une vitesse moyenne tandis que le nombre dérivé peut être interprété comme une vitesse instantanée ;
- dans un cadre économique, le nombre dérivé sert de valeur approchée du coût marginal.

Exemple 6. La distance parcourue par une boule sur une rampe, en m, est donnée en fonction du temps x, en s, par $f(x) = 0{,}4x^2$. On admet que $f'(2) = 1{,}6$. Interpréter ce résultat.

Solution. À l'instant $x = 2$ s, la vitesse instantanée de la boule est $1{,}6\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Exemple 7. Une entreprise fabrique q objets pour un coût total, en euros, de $C(q) = 0{,}01q^2 + 20q + 500$. On admet que $C'(100) = 22$. Interpréter ce résultat.

Solution. Le coût marginal est le coût de fabrication d'un objet supplémentaire, soit $C(q + 1) - C(q)$.

D'après la définition 4 avec $h = 1$, $C(101) \approx C(100) + C'(100) \times 1$ donc $C(101) - C(100) \approx C'(100) = 22$.

Fabriquer le 101e objet coûte donc environ 22 €.

Vérification : $C(100) = 100 + 2\,000 + 500 = 2\,600$ et $C(101) = 102{,}01 + 2\,020 + 500 = 2\,622{,}01$, donc $C(101) - C(100) = 22{,}01$.