LA DÉRIVATION

1. POINT DE VUE LOCAL
2. POINT DE VUE GLOBAL
3. VARIATIONS ET EXTREMUMS

Partie 1

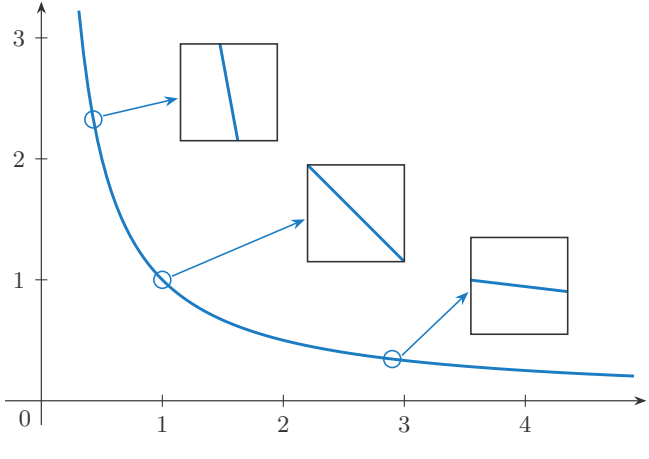
Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

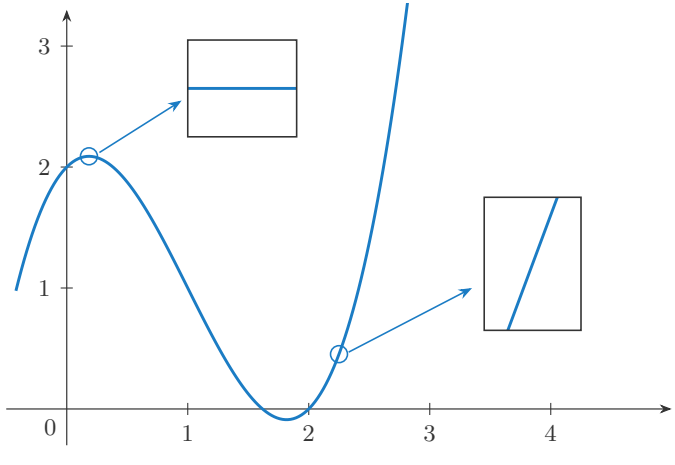
« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. »

Alexandre Grothendieck

Courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ avec trois zooms.



Courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ avec deux zooms.



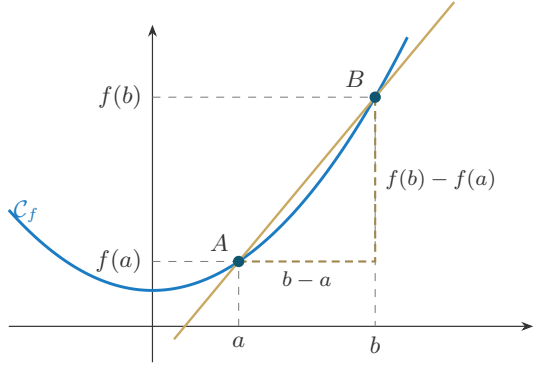
I. TAUX DE VARIATION D'UNE FONCTION
ET SÉCANTE À UNE COURBE

I. TAUX DE VARIATION ET SÉCANTE

Définition 1

Le **taux de variation** d'une fonction f entre a et b est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ce taux de variation est la **pente** (ou coefficient directeur) de la **sécante** (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$.

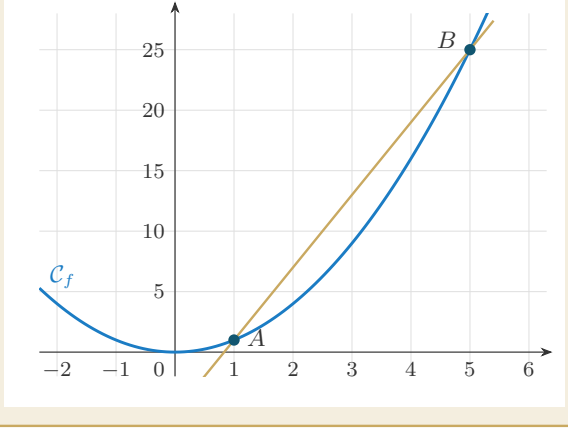


I. TAUX DE VARIATION ET SÉCANTE

Exemple 1

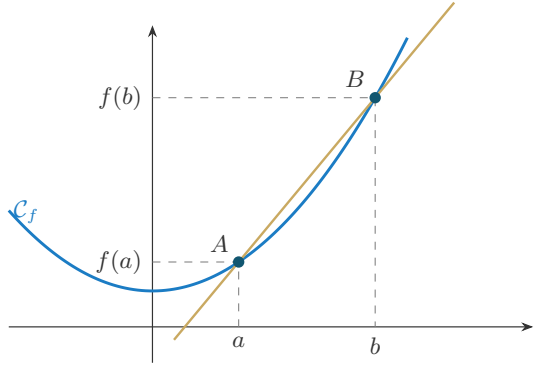
Calculer le taux de variation de la fonction carré ($f(x) = x^2$) entre 1 et 5.

En déduire la pente de la sécante (AB) où $A(1\,;1)$ et $B(5\,;25)$.



I. TAUX DE VARIATION ET SÉCANTE

Le **taux de variation** d'une fonction est la **pente de la sécante** à la courbe.



II. NOMBRE DÉRIVÉ D'UNE FONCTION EN UN RÉEL
ET TANGENTE À UNE COURBE EN UN POINT

II. NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE

Définition 2

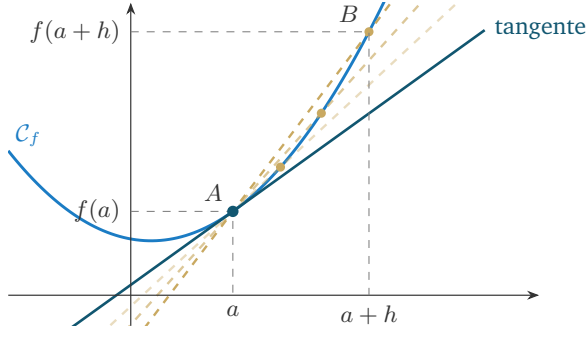
Lorsque h se rapproche de 0, si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre réel, on dit alors que f est **dérivable en** a et ce nombre est appelé **nombre dérivé de** f **en** a et noté $f'(a)$.

Dans d'autres disciplines, il existe aussi les notations $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

II. NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE

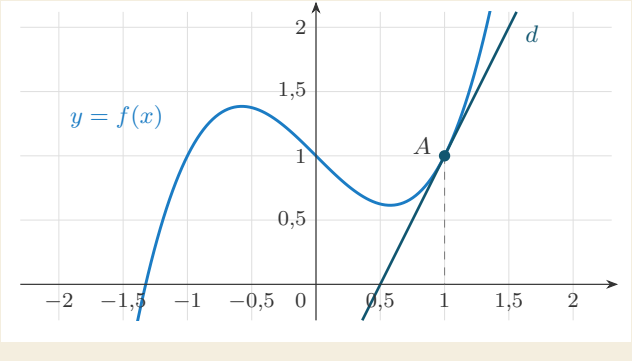
Définition 3

Soit f une fonction dérivable en a et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. La **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par A et de pente $f'(a)$. C'est la « limite des sécantes » (AB) lorsque le point B se rapproche du point A.



Exemple 2

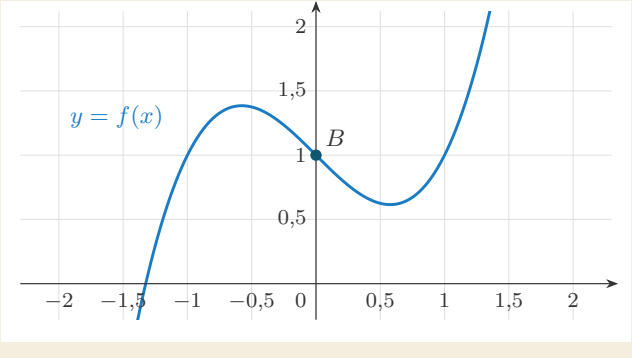
On a tracé la courbe représentative d'une fonction f et sa tangente en A, le point de la courbe d'abscisse 1.



Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.

Exemple 3

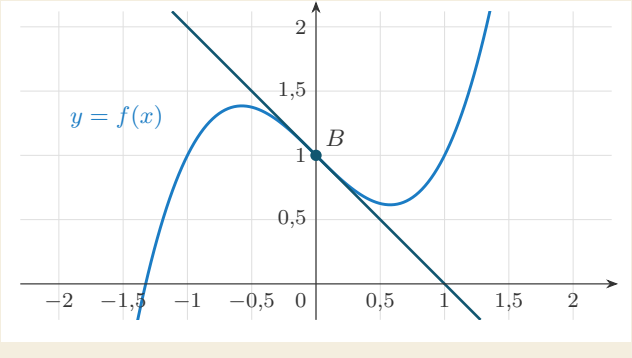
On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f. On donne $f'(0) = -1$.



Construire la tangente à la courbe en B.

Exemple 3

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f. On donne $f'(0) = -1$.



La tangente en B

Fonctions **non dérivables en un point** (deux cas en première)

Théorème 1

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

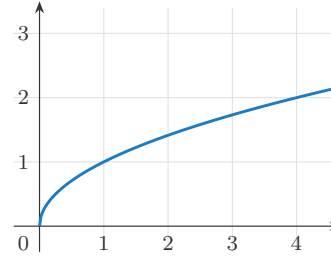
Démonstration

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Pour $h > 0$, le taux de variation de f entre 0 et h est :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

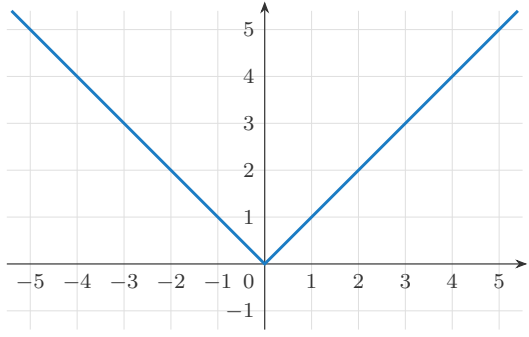
Lorsque h se rapproche de 0, $\sqrt{h}$ se rapproche de 0 donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient aussi grand qu'on veut (pour $h = 0{,}01$, il vaut 10 ; pour $h = 0{,}0001$, il vaut $100\ldots$) : le taux de variation ne se rapproche d'aucun nombre réel.

La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0 : sa courbe « devient verticale » à l'origine.



Fonctions **non dérivables en un point** (deux cas en première)

Courbe représentative de la fonction valeur absolue



Théorème 2

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

Démonstration

$f'(a)$ est la pente de la tangente donc son équation réduite $y = mx + p$ est de la forme :

$$y = f'(a)\,x + p \quad (1)$$

Il reste à déterminer p. Mais la tangente passe par le point A. Ses coordonnées $\big(a\,;f(a)\big)$ vérifient donc l'équation (1), ce qui donne :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

On obtient ainsi :

$$p = f(a) - f'(a) \times a$$

que l'on peut injecter dans l'équation (1) :

$$y = f'(a)\,x + f(a) - f'(a) \times a$$

et après réorganisation et factorisation par $f'(a)$, on obtient l'équation :

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$$

Exemple 4

Déterminer l'équation réduite de la tangente en 2 à la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 1$ sachant que $f'(2) = 8$.

III. APPROXIMATION AFFINE

III. APPROXIMATION AFFINE

Définition 4

Soit f une fonction dérivable en a. La fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée **fonction affine tangente** de f au voisinage de a. Pour h proche de 0, on peut ainsi approcher $f(a + h)$ par :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\, h$$

Exemple 5

Soit f la fonction racine carrée, définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On a $f(1) = 1$ et on admet que $f'(1) = 0{,}5$. Donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}02}$.

Le taux de variation et le nombre dérivé peuvent être illustrés dans des contextes variés :

- en **géométrie**, le taux de variation représente la pente d'une sécante tandis que le nombre dérivé représente la pente d'une tangente ;
- en **cinématique** (étude physique des mouvements), le taux de variation peut être interprété comme une vitesse moyenne tandis que le nombre dérivé peut être interprété comme une vitesse instantanée ;
- dans un cadre **économique**, le nombre dérivé sert de valeur approchée du coût marginal.

Exemple 6

La distance parcourue par une boule sur une rampe, en m, est donnée en fonction du temps x, en s, par $f(x) = 0{,}4x^2$. On admet que $f'(2) = 1{,}6$. Interpréter ce résultat.

Exemple 7

Une entreprise fabrique q objets pour un coût total, en euros, de $C(q) = 0{,}01q^2 + 20q + 500$. On admet que $C'(100) = 22$. Interpréter ce résultat.

Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ Vérification de la partie 1

Les définitions et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

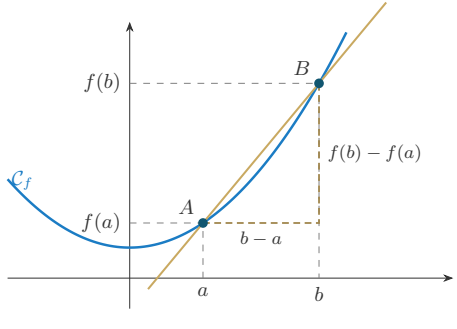
Partie 2

Revoir le cours

Une diapositive par section, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. TAUX DE VARIATION ET SÉCANTE

en une diapositive



Définition 1

Taux de variation entre a et b

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

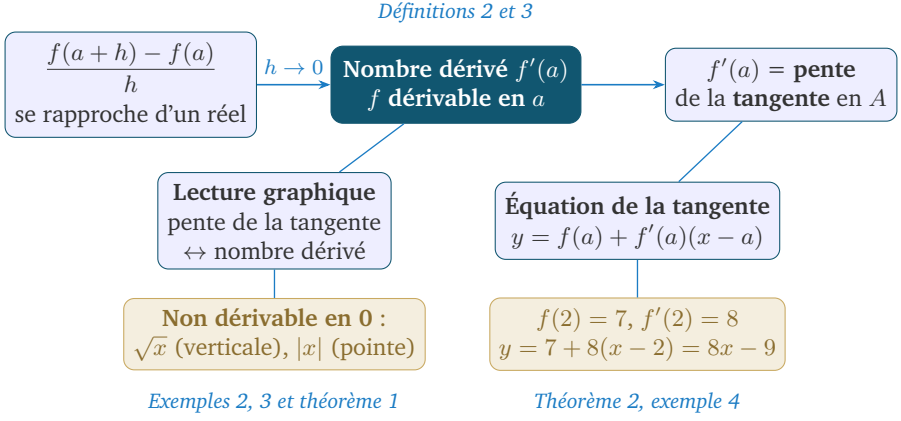
$=$ **pente de la sécante** (AB)

Carré entre 1 et 5 :

$$\frac{25 - 1}{5 - 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Exemple 1

II. NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE *en une diapositive*



III. APPROXIMATION AFFINE *en une diapositive*

Définition 4 — pour h proche de 0 : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h}$

Exemple 5 : $\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}5 \times 0{,}02 = 1{,}01$

Contexte	Taux de variation	Nombre dérivé
Géométrie	pente d'une sécante	pente d'une tangente
Cinématique	vitesse moyenne	vitesse instantanée Exemple 6 : $1{,}6$ m·s^{-1} à l'instant 2 s
Économie	—	valeur approchée du coût marginal Exemple 7 : le 101^{e} objet coûte environ 22 €

Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les sept exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier G — Le zoom infini

Atelier H — Cap sur l'EAM