1666. La peste a fermé l'université de Cambridge : le jeune Isaac Newton travaille seul dans la ferme familiale de Woolsthorpe.

La distance parcourue par la pierre, en mètres, au bout de t secondes, est $x = f(t) = 5t^2$.

Question 1. Calculer la vitesse moyenne de la pierre entre $t = 1$ et $t = 2$.

Mais à l'instant $t = 2$ précisément, quelle est sa vitesse ?

Question 2. Montrer que, pour $h \neq 0$,
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 20 + 5h.$$
Question 3. En déduire $f'(2)$ et l'interpréter.

Cette vitesse, je la nomme *fluxion* et je la note $\dot{x}$!

Question 4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

1684. En Allemagne, Gottfried Wilhelm Leibniz publie sa propre méthode.

Moi, j'écris $\frac{dx}{dt}$!
Et tout près de $t = 2$, la courbe se confond avec sa tangente !

Nova methodus pro maximis et minimis.

Question 5. Sans calculatrice, donner une valeur approchée de $f(2{,}1)$, puis la comparer à la valeur exacte.

1712. La Royal Society de Londres, présidée par Newton, donne raison à Newton. La querelle durera des années.

Aujourd'hui, on utilise trois notations : $\dot{x}$ en physique, $\frac{dx}{dt}$ un peu partout, et $f'(t)$, celle de Lagrange (1797), en mathématiques !

Objectifs : Du taux au nombre dérivé, en suivant Newton et Leibniz.
Durée : 35 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les données et les cinq questions sont dans les bulles et les cartouches de la planche, au recto : lisez-la dans l'ordre des cases, répondez sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont en bas de la page.

Aide au calcul

$2{,}1^2 = 4{,}41$ et $5 \times 4{,}41 = 22{,}05$

AIDES

1. *Voir définition 1.* La vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 2$ est le taux de variation de f entre 1 et 2. On a $f(1) = 5$ et $f(2) = 20$.

2. Développez : $(2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$, donc $f(2+h) = 20 + 20h + 5h^2$. Soustrayez $f(2)$, puis divisez chaque terme par h.

3. *Voir définition 2 et exemple 6.* Que devient $20 + 5h$ lorsque h se rapproche de 0 ? Dans ce contexte, un nombre dérivé est une vitesse instantanée, en m/s.

4. *Voir théorème 2.* $y = f(2) + f'(2)(t-2)$, avec $f(2) = 20$. *Valeur de contrôle* : l'ordonnée à l'origine vaut -20.

5. *Voir définition 4 et exemple 5.* $2{,}1 = 2 + 0{,}1$, donc $f(2{,}1) \approx f(2) + f'(2) \times 0{,}1$. Pour la valeur exacte, utilisez l'aide au calcul.