CHAPITRE 105

Dérivation : point de vue local — notes de présentation, partie 1

Séance 1 — 46 min. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier, et repèrent les numéros cités. Aucune calculatrice.

1. Page de garde — Partie 1 — *1 min*

Anecdote Leibniz publie le premier le calcul différentiel, en 1684 ; Newton tenait ses « fluxions » depuis 1665–1666 mais ne les publie que bien plus tard. En 1712, la Royal Society tranche la querelle de priorité en faveur de Newton… dans un rapport que Newton a lui-même largement rédigé. *(R. S. Westfall,* Never at Rest*, 1980)*

2. Introduction — $y = \dfrac{1}{x}$ et ses trois zooms — *1 min*

Au tableau Rien : on fait constater qu'à chaque zoom, le morceau de courbe vu dans la loupe ressemble davantage à une droite, plus ou moins pentue selon le point.

3. Introduction — $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ et ses deux zooms — *2 min*

Au tableau Rien : on fait constater qu'en zoomant sur un point, la courbe ressemble à une droite ; au sommet, cette droite est horizontale (pente nulle).

4. I. Définition 1 — taux de variation, sécante — *3 min*

Au tableau $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = pente de la sécante (AB), avec $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $B\big(b\,;f(b)\big)$: écart des images sur écart des abscisses, dans le même ordre.

5. Exemple 1 — *3 min*

Au tableau $\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{25-1}{4} = \dfrac{24}{4} = 6.$ La sécante (AB) a pour pente 6.

6. Récapitulatif I — *1 min*

Au tableau Taux de variation = pente de la sécante.

7. II. Définition 2 — nombre dérivé — *5 min*

Au tableau Fonction carré en $a = 1$: $\dfrac{(1+h)^2-1^2}{h} = \dfrac{2h+h^2}{h} = 2+h.$ $h = 0{,}1 \to 2{,}1$; $h = 0{,}01 \to 2{,}01$; $h = -0{,}01 \to 1{,}99.$ Donc $f'(1) = 2$. On ne prend pas $h = 0$: on diviserait par zéro.

Anecdote La notation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est celle de Leibniz (1684) ; l'écriture $f'(x)$ et le mot « dérivée » viennent de Lagrange, en 1797. *(F. Cajori,* A History of Mathematical Notations*, 1929 ; Lagrange,* Théorie des fonctions analytiques*, 1797)*

8. Définition 3 — tangente — *3 min*

Au tableau Quand B se rapproche de A, les sécantes (AB) tournent autour de A et se rapprochent de la tangente en A, de pente $f'(a)$.

Anecdote Vers 1636, Fermat obtient les tangentes par sa méthode d'« adégalité » ; Descartes, qui a sa propre méthode, la juge fausse, et la querelle de 1638 s'envenime au point de mobiliser Mersenne et plusieurs géomètres. *(M. S. Mahoney,* The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, 1973)*

9. Exemple 2 — lire un nombre dérivé — *3 min*

Au tableau La tangente passe par $(0{,}5\,;0)$ et $(1\,;1)$: $\dfrac{1-0}{1-0{,}5} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$, donc $f'(1) = 2$. Choisir deux points à coordonnées nettes.

10. Exemple 3 — énoncé *1 min*

Au tableau $f'(0) = -1$: depuis $B(0\,;1)$, on avance de 1 et on descend de 1 : point $(1\,;0)$.

11. Exemple 3 — la tangente *2 min*

Au tableau Tracé de la droite passant par $B(0\,;1)$ et $(1\,;0)$. Ici la tangente *traverse* la courbe en B : une tangente n'est pas « une droite qui ne touche qu'une fois ».

12. Théorème 1 — racine carrée en 0 (démonstration) *4 min*

Au tableau $\dfrac{\sqrt{h}-0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$; $h = 0{,}01$: $\dfrac{1}{0{,}1} = 10$; $h = 0{,}0001$: $\dfrac{1}{0{,}01} = 100$. Le taux grandit sans fin. La racine carrée est *définie* en 0, mais pas dérivable : sa courbe y devient verticale.

13. Valeur absolue en 0 *2 min*

Au tableau $\dfrac{|0+h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$: deux valeurs, pas de nombre dérivé. La courbe a une pointe en 0.

Anecdote Le 18 juillet 1872, Weierstrass présente à l'Académie de Berlin une fonction continue dont la courbe n'a de tangente en aucun point. En 1893, Hermite écrit à Stieltjes qu'il se détourne « avec effroi et horreur » de ces fonctions continues sans dérivée. *(Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, lettre du 20 mai 1893)*

14. Théorème 2 — équation de la tangente (démonstration) *4 min*

Au tableau $y = f'(a)\,x + p$; $A\big(a\,;f(a)\big)$ donne $p = f(a) - f'(a) \times a$; d'où $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

15. Exemple 4 *3 min*

Au tableau $f(2) = 2 \times 2^2 - 1 = 7$ et $f'(2) = 8$: $y = 7 + 8(x-2) = 8x - 9$. Contrôle : pour $x = 2$, $8 \times 2 - 9 = 7 = f(2)$.

16. III. Définition 4 et exemple 5 — approximation affine *4 min*

Au tableau $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$. Exemple 5 : $a = 1$, $h = 0{,}02$ (et non $1{,}02$) : $\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}5 \times 0{,}02 = 1{,}01$. La calculatrice, *après coup* : $1{,}00995$.

Anecdote Au I^er^ siècle, Héron d'Alexandrie approche $\sqrt{720}$ par $26 + \frac{5}{6}$; c'est exactement $27 + \frac{1}{2\times 27} \times (-9)$, notre formule avec $a = 729$ et $h = -9$. *(Héron d'Alexandrie,* Métriques*, livre I, 8)*

17. Contextes — exemples 6 et 7 *4 min*

Au tableau Ex. 6 : $f'(2) = 1{,}6$: à l'instant 2 s, la vitesse instantanée de la boule est $1{,}6$ m $\cdot$ s^{-1}.
Ex. 7 : $C(101) \approx C(100) + C'(100) = C(100) + 22$: le 101^e^ objet coûte environ 22 € (exactement $C(101) - C(100) = 22{,}01$ €).

Anecdote La boule sur la rampe, c'est Galilée : ses plans inclinés montrent que la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps. *(Galilée,* Discorsi*, 1638)*