Formule des probabilités totales et indépendance

Cours

« La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul. »

Pierre-Simon de Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814

I. Formule des probabilités totales

En probabilité, l'**univers** est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Définition 1. Une **partition d'un univers** ou **système complet d'évènements** est un ensemble d'évènements vérifiant :

1. la probabilité de chaque évènement est non nulle ;
2. les évènements sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire que l'intersection de deux évènements est vide) ;
3. la réunion de tous les évènements est l'univers.

Lorsqu'on lance un dé classique à 6 faces et qu'on s'intéresse au numéro obtenu, l'univers est l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ et les évènements « obtenir 6 », « obtenir 4 ou 5 » et « obtenir moins de 4 » forment une partition de cet univers.

On peut remarquer en particulier **qu'un évènement A et son contraire $\overline{A}$, si leurs probabilités ne sont pas nulles, forment une partition de l'univers.**

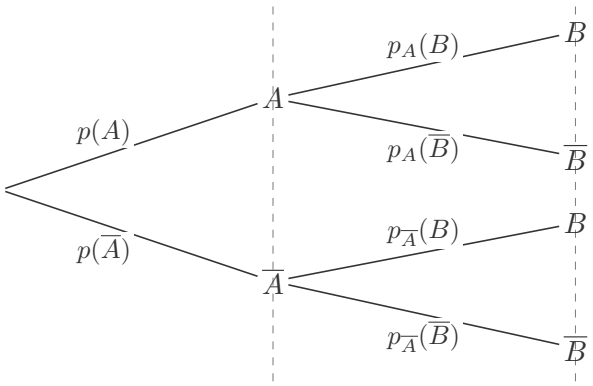
Théorème 1 (formule des probabilités totales simplifiée). Soient A et B deux évènements. On a :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$$

Démonstration. Soient A et B deux évènements.
Cas trivial : si B est de probabilité nulle, les deux membres sont égaux à 0.
Maintenant, si B est de probabilité non nulle, on a : $p_B(A) + p_B(\overline{A}) = 1$. Ce qui donne :

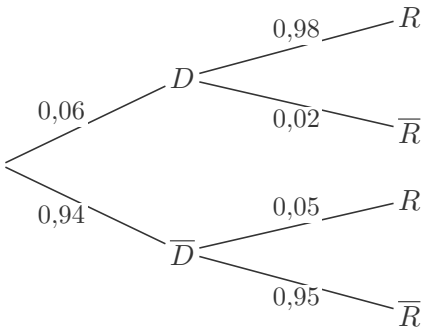
$$\begin{aligned} p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) &= p_B(A) \times p(B) + p_B(\overline{A}) \times p(B) \\ &= \big(p_B(A) + p_B(\overline{A})\big) \times p(B) \\ &= 1 \times p(B) \\ &= p(B) \end{aligned}$$

Cette formule permet de calculer la probabilité d'un évènement écrit au deuxième niveau d'un arbre pondéré.



$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

Exemple 1. Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6 % sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement. On note D l'évènement « le lecteur MP3 est défectueux » et R l'évènement « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ». Construire un arbre pondéré puis calculer la probabilité qu'un lecteur MP3 soit rejeté.



Solution. $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 6\,\% = 94\,\% = 0{,}94$
$p_D(\overline{R}) = 1 - p_D(R) = 1 - 98\,\% = 2\,\% = 0{,}02$
$p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 1 - p_{\overline{D}}(R) = 1 - 5\,\% = 95\,\% = 0{,}95$
D'où l'arbre pondéré ci-contre.

D'après la formule des probabilités totales :

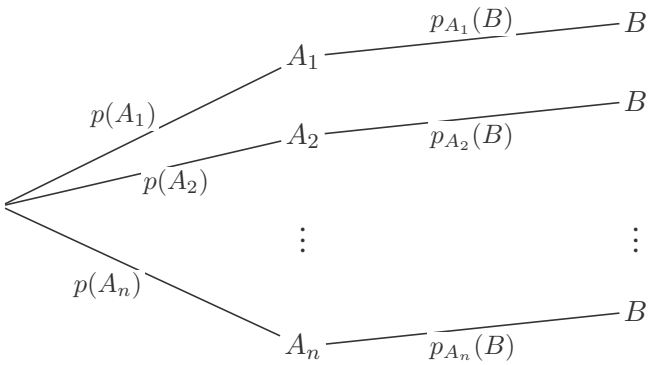
$$p(R) = p(R \cap D) + p(R \cap \overline{D}) = p_D(R) \times p(D) + p_{\overline{D}}(R) \times p(\overline{D}) = 0{,}98 \times 0{,}06 + 0{,}05 \times 0{,}94 = 0{,}1058$$

La probabilité qu'un lecteur MP3 soit rejeté est $0{,}1058$.

Théorème 2 (formule des probabilités totales). Si les évènements A_1, A_2, …, A_n forment une partition de l'univers, alors, pour tout évènement B, on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n)$$

Démonstration. Similaire à la précédente.



II. Indépendance de deux évènements

Définition 2. Deux évènements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Il ne faut pas confondre « incompatibles » et « indépendants » : deux évènements A et B sont incompatibles si $p(A \cap B) = 0$.

Exemple 2. Un jeu de 32 cartes classique comprend quatre « couleurs » et chaque couleur comporte 8 cartes. Les quatre couleurs sont cœur (♥), carreau (♦), trèfle (♣) et pique (♠). Les huit cartes de chaque couleur sont : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « la carte tirée est un carreau » et B l'évènement « la carte tirée est rouge ». Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Solution. $p(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ et $p(A) \times p(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ donc $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ donc, d'après la définition 2, les évènements A et B ne sont pas indépendants.

Exemple 3. Deux machines fonctionnent de façon indépendante. On note A : « La 1re machine fonctionne » et B : « La 2e machine fonctionne ». On donne $p(A) = 0{,}9$ et $p(B) = 0{,}8$. Quelle est la probabilité que les deux machines fonctionnent simultanément ?

Solution. Les deux machines fonctionnent de façon indépendante donc les évènements A et B sont indépendants donc, d'après la définition 2 :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$$

La probabilité que les deux machines fonctionnent simultanément est $0{,}72$.

Théorème 3. Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants ;
- $p_A(B) = p(B)$;
- $p_B(A) = p(A)$.

Démonstration. Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$\begin{aligned} & A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ \iff & p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \\ \iff & \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) \\ \iff & p_A(B) = p(B) \end{aligned}$$

En permutant A et B, on obtient la dernière équivalence.

C'est ce théorème qui permet de vraiment comprendre la notion d'évènements indépendants. A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de B sachant A est égale à la probabilité de B. Ceci équivaut à dire que la réalisation ou non de l'évènement A n'a pas d'influence sur la probabilité de l'évènement B. Et vice versa.

Exemple 4. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « la carte tirée est un carreau » et C l'évènement « la carte tirée est un roi ». Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Solution. $p_C(A) = \frac{1}{4}$ et $p(A) = \frac{1}{4}$ donc $p_C(A) = p(A)$ donc les évènements A et C sont indépendants.

Autres preuves : $p_A(C) = \frac{1}{8}$ et $p(C) = \frac{1}{8}$ donc $p_A(C) = p(C)$ donc les évènements A et C sont indépendants.

$p(A \cap C) = \frac{1}{32}$ et $p(A) \times p(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ donc $p(A \cap C) = p(A) \times p(C)$ donc les évènements A et C sont indépendants.

Théorème 4. Si deux évènements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Démonstration. Soient A et B deux évènements indépendants.

$$\begin{aligned} p(A \cap \overline{B}) &= p(A) - p(A \cap B) && \text{(d'après la formule des probabilités totales simplifiée)} \\ &= p(A) - p(A) \times p(B) && \text{(d'après la définition 2)} \\ &= p(A)\left(1 - p(B)\right) \\ &= p(A) \times p(\overline{B}) \end{aligned}$$

Donc, d'après la définition 2, A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Exemple 5. Pour aller au lycée, Lina prend un bus puis un tram. Les retards du bus et du tram sont indépendants. On note B : « le bus est en retard » et T : « le tram est en retard ». On donne $p(B) = 0{,}1$ et $p(T) = 0{,}2$. Calculer la probabilité que le bus soit en retard mais pas le tram.

Solution. B et T sont indépendants, donc B et $\overline{T}$ le sont aussi d'après le théorème 4. De plus, $p(\overline{T}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
Donc $p(B \cap \overline{T}) = p(B) \times p(\overline{T}) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$.
La probabilité que le bus soit en retard mais pas le tram est $0{,}08$.