FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

I. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

II. INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul. »

— Pierre-Simon de Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

I. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Définition 1

Une **partition d'un univers** ou **système complet d'évènements** est un ensemble d'évènements vérifiant trois conditions :

1. la probabilité de chaque évènement est non nulle ;
2. les évènements sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire que l'intersection de deux évènements est vide) ;
3. la réunion de tous les évènements est l'univers.

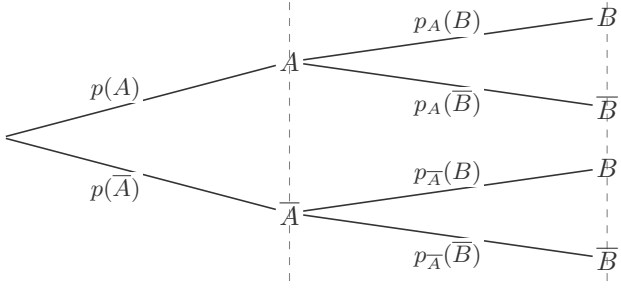
Lorsqu'on lance un dé classique à 6 faces et qu'on s'intéresse au numéro obtenu, l'univers est l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ et les évènements « obtenir 6 », « obtenir 4 ou 5 » et « obtenir moins de 4 » forment une partition de cet univers.

On peut remarquer en particulier **qu'un évènement A et son contraire $\overline{A}$, si leurs probabilités ne sont pas nulles, forment une partition de l'univers.**

Théorème 1 (formule des probabilités totales simplifiée)

Soient A et B deux évènements. On a :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$$



Exemple 1

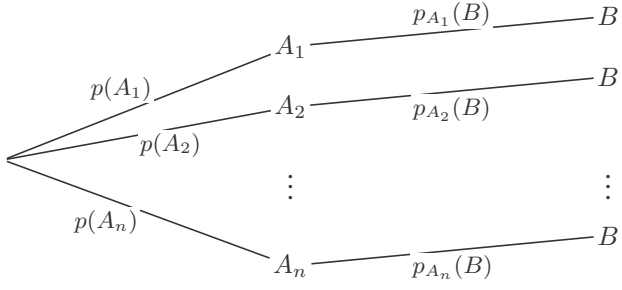
Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6 % sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement. On note D l'évènement « le lecteur MP3 est défectueux » et R l'évènement « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

Construire un arbre pondéré puis calculer la probabilité qu'un lecteur MP3 soit rejeté.

Théorème 2 (formule des probabilités totales complète)

Si les évènements A_1, A_2, …, A_n forment une partition de l'univers, alors, pour tout évènement B, on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n)$$



II. INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Définition 2

Deux évènements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Il ne faut pas confondre « incompatibles » et « indépendants » : deux évènements A et B sont incompatibles si $p(A \cap B) = 0$.

Exemple 2

Un jeu de 32 cartes classique comprend quatre « couleurs » et chaque couleur comporte 8 cartes. Les quatre couleurs sont cœur (♥), carreau (♦), trèfle (♣) et pique (♠). Les huit cartes de chaque couleur sont : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « la carte tirée est un carreau » et B l'évènement « la carte tirée est rouge ». Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exemple 3

Deux machines fonctionnent de façon indépendante. On note A : « La 1re machine fonctionne » et B : « La 2e machine fonctionne ». On donne $p(A) = 0{,}9$ et $p(B) = 0{,}8$. Quelle est la probabilité que les deux machines fonctionnent simultanément ?

Théorème 3

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants ;
- $p_A(B) = p(B)$;
- $p_B(A) = p(A)$.

Exemple 4

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « la carte tirée est un carreau » et C l'évènement « la carte tirée est un roi ». Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Théorème 4

Si deux évènements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Exemple 5

Pour aller au lycée, Lina prend un bus puis un tram. Les retards du bus et du tram sont indépendants. On note B : « le bus est en retard » et T : « le tram est en retard ». On donne $p(B) = 0{,}1$ et $p(T) = 0{,}2$.

Calculer la probabilité que le bus soit en retard mais pas le tram.

Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ Vérification de la partie 1

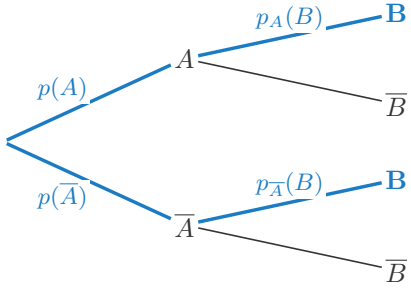
Les définitions et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

Partie 2

Revoir le cours

Une diapositive par partie, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES *en une diapositive*

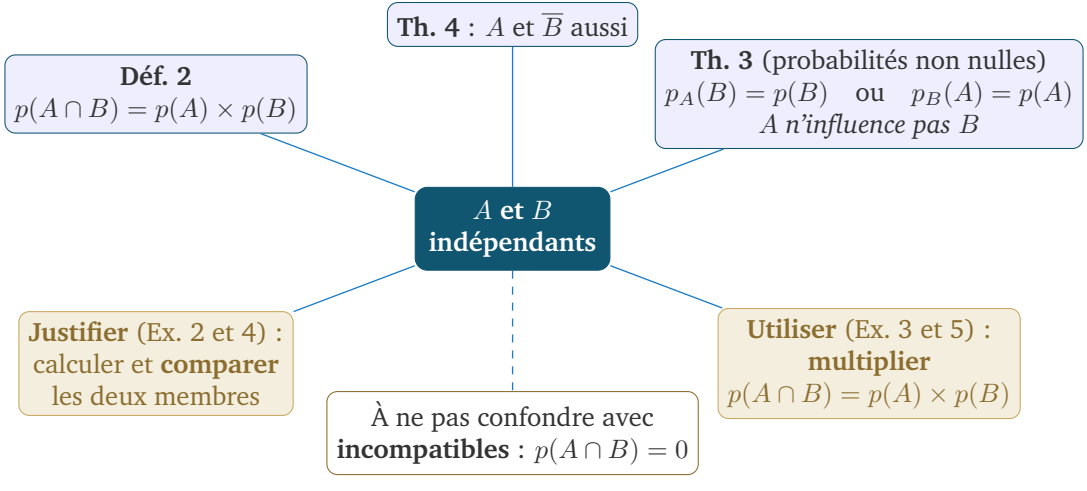


Th. 1 $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$
Sur l'arbre : on **additionne** les chemins qui mènent à B, chaque chemin étant un **produit** :
$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$

Th. 2 plus de deux branches : les A_i doivent former une **partition** (Déf. 1 : probabilités non nulles, deux à deux incompatibles, réunion égale à l'univers).

Ex. 1 $p(R) = 0{,}06 \times 0{,}98 + 0{,}94 \times 0{,}05 = 0{,}1058$

II. INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS *en une diapositive*



Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les cinq exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier G — Le test de dépistage

Atelier H — QCM façon EAM