

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

Le diaporama

Partie 1 : la présentation. Partie 2 : le récapitulatif.

Partie 1

Partie 2

La vérification

QCM en deux parties. Ni noté, ni chronométré.

Partie 1

Partie 2

Les ateliers en ligne *Les autres ateliers sont distribués en classe.*

Atelier G — Le test de dépistage

Atelier H — QCM façon EAM

Les pastilles **bleues** restent dans ce document, les **dorées** ouvrent un fichier en ligne. Le bandeau de titre de chaque page ramène ici.

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

I. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

II. INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul. »

— Pierre-Simon de Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, 1814

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE

I. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Définition 1

Une **partition d'un univers** ou **système complet d'évènements** est un ensemble d'évènements vérifiant trois conditions :

1. la probabilité de chaque évènement est non nulle ;
2. les évènements sont deux à deux incompatibles (c'est-à-dire que l'intersection de deux évènements est vide) ;
3. la réunion de tous les évènements est l'univers.

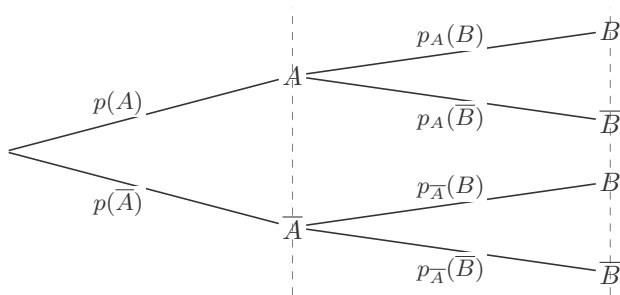
Lorsqu'on lance un dé classique à 6 faces et qu'on s'intéresse au numéro obtenu, l'univers est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et les évènements « obtenir 6 », « obtenir 4 ou 5 » et « obtenir moins de 4 » forment une partition de cet univers.

On peut remarquer en particulier **qu'un évènement A et son contraire $\bar{A}$, si leurs probabilités ne sont pas nulles, forment une partition de l'univers.**

Théorème 1 (formule des probabilités totales simplifiée)

Soient A et B deux évènements. On a :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$$



Exemple 1

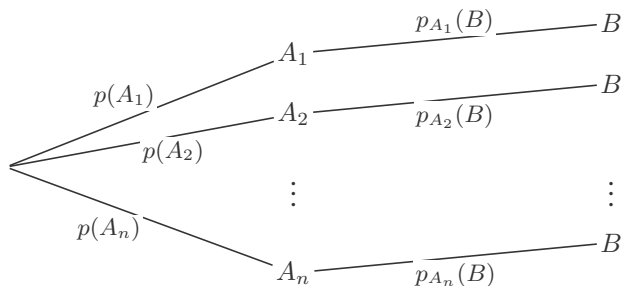
Une entreprise fabrique des lecteurs MP3 dont 6 % sont défectueux. Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement. On note D l'évènement « le lecteur MP3 est défectueux » et R l'évènement « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

Construire un arbre pondéré puis calculer la probabilité qu'un lecteur MP3 soit rejeté.

Théorème 2 (formule des probabilités totales complète)

Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors, pour tout événement B , on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$



II. INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Définition 2

Deux évènements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Il ne faut pas confondre « incompatibles » et « indépendants » : deux évènements A et B sont incompatibles si $p(A \cap B) = 0$.

Exemple 2

Un jeu de 32 cartes classique comprend quatre « couleurs » et chaque couleur comporte 8 cartes. Les quatre couleurs sont cœur (♥), carreau (♦), trèfle (♣) et pique (♠). Les huit cartes de chaque couleur sont : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « la carte tirée est un carreau » et B l'évènement « la carte tirée est rouge ». Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exemple 3

Deux machines fonctionnent de façon indépendante. On note A : « La 1^{re} machine fonctionne » et B : « La 2^e machine fonctionne ». On donne $p(A) = 0,9$ et $p(B) = 0,8$. Quelle est la probabilité que les deux machines fonctionnent simultanément ?

Théorème 3

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants ;
- $p_A(B) = p(B)$;
- $p_B(A) = p(A)$.

Exemple 4

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « la carte tirée est un carreau » et C l'évènement « la carte tirée est un roi ». Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Théorème 4

Si deux évènements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Exemple 5

Pour aller au lycée, Lina prend un bus puis un tram. Les retards du bus et du tram sont indépendants. On note B : « le bus est en retard » et T : « le tram est en retard ». On donne $p(B) = 0,1$ et $p(T) = 0,2$.

Calculer la probabilité que le bus soit en retard mais pas le tram.

Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ **Ouvrir le QCM de vérification**

Les définitions et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

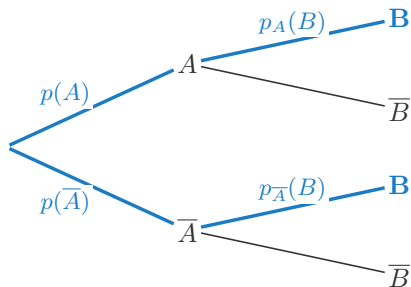
Partie 2

Revoir le cours

Une diapositive par partie, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

en une diapositive



Th. 1 $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

Sur l'arbre : on **additionne** les chemins qui mènent à B , chaque chemin étant un **produit** :

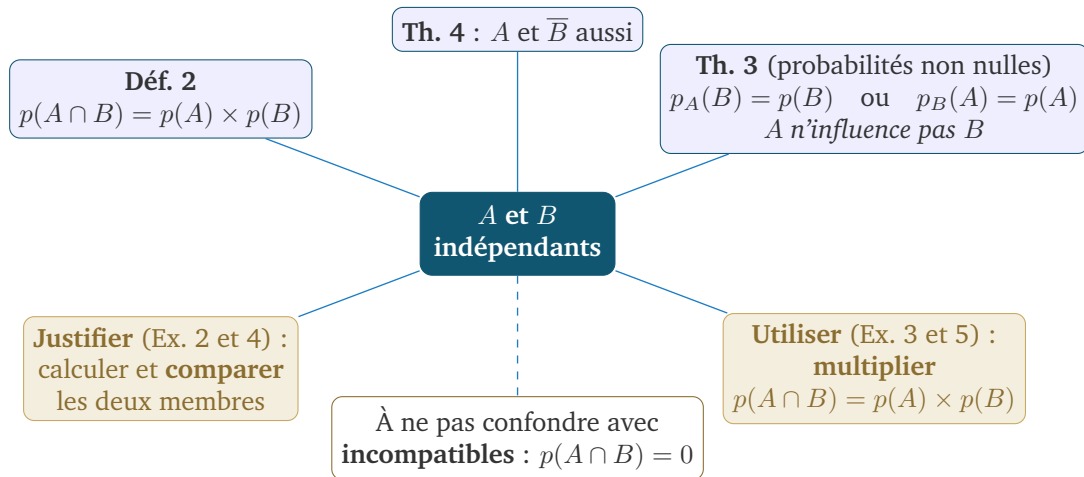
$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

Th. 2 plus de deux branches : les A_i doivent former une **partition** (Déf. 1 : probabilités non nulles, deux à deux incompatibles, réunion égale à l'univers).

Ex. 1 $p(R) = 0,06 \times 0,98 + 0,94 \times 0,05 = 0,1058$

II. INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

en une diapositive



Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ **Ouvrir le QCM de vérification**

Les cinq exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.