Dérivation : point de vue global

Cours

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs "yeux" pour l'appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. »

Alexandre Grothendieck

Le nombre dérivé d'une fonction est une notion locale : on se focalise sur un point particulier. Voyons maintenant si on peut prendre de la hauteur et avoir un point de vue global.

En calculant le nombre dérivé de la fonction carré ($f(x) = x^2$) en quelques points, on obtient :

$$f'(1) = 2, \qquad f'(2) = 4, \qquad f'(3) = 6, \ \ldots$$

Il semble se dégager une relation toute simple entre un nombre x et le nombre dérivé correspondant : $f'(x) = 2x$. En prouvant cette relation, on éviterait le calcul fastidieux et répétitif de chaque nombre dérivé de la fonction carré. Le taux de variation de la fonction carré entre un réel x quelconque et $x + h$ (avec $h \neq 0$) est :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux tend vers $2x$. On a donc bien, pour tout réel x : $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.

Cette relation générale entre un réel x quelconque et le nombre dérivé de la fonction carré en x est remarquable de simplicité : la fonction qui à tout réel x associe le nombre $2x$ est appelée **fonction dérivée de la fonction carré**.

Désormais, pour obtenir un nombre dérivé de la fonction carré, il sera bien plus commode d'utiliser la fonction dérivée plutôt que de passer par la limite du taux de variation. On veut le nombre dérivé de la fonction carré en 5 ? Facile : $f'(5) = 2 \times 5 = 10$. Et en -4 ? Tout aussi simple : $f'(-4) = 2 \times (-4) = -8$.

I. Fonction dérivée

D'une manière générale, la fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé d'une fonction donnée est appelée fonction dérivée de la fonction donnée.

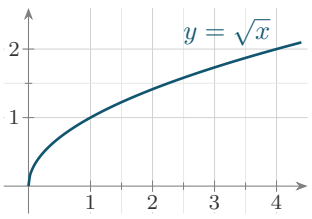
Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

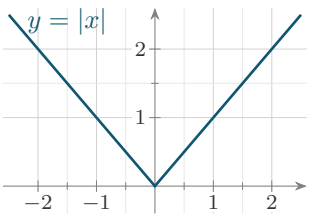
La fonction f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en chaque réel x de I.

La fonction, notée f', qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.

À l'usage, on abrégera souvent l'expression « fonction dérivée d'une fonction » en « dérivée » tout simplement : par exemple, on dira « la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ » au lieu de dire « la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est la fonction f' définie par $f'(x) = 2x$ ».

Rappel. Il existe des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points : on a vu que la fonction **racine carrée** n'est pas dérivable en 0 (sa courbe « devient verticale » à l'origine) et que la fonction **valeur absolue** ne l'est pas non plus (sa courbe garde la forme d'un « v », même en zoomant).
La fonction racine carrée est donc définie sur $[0\,;+\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0\,;+\infty[$.





II. Fonctions dérivées de référence

Peut-on faire la même chose avec les fonctions de référence ? Le principe est toujours le même : on calcule le taux de variation $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, on le simplifie au mieux, puis on cherche vers quel nombre il tend lorsque h tend vers 0. Les résultats sont regroupés dans un tableau, qui constitue une liste de théorèmes à connaître.

Théorème 1. c désigne un nombre réel et n désigne un entier naturel non nul.

Fonction	Domaine de définition	$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
constante	$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$
identité	$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
carré	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
cube	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
puissance n	$\mathbb{R}$	x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
inverse	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
racine carrée	$[0\,;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
inverse de puissance n	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

On rappelle que, pour tout réel x non nul, $x^{-1}=\dfrac{1}{x}$, $x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ et plus généralement $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$. La dernière ligne du tableau s'écrit alors : la dérivée de x^{-n} est $-n\,x^{-n-1}$. Autrement dit, la formule de la dérivée de la fonction puissance s'étend aux exposants entiers strictement négatifs.

Démonstration. **Fonction carré.** Voir l'introduction. **Fonction inverse.** Soit $f(x)=\dfrac{1}{x}$, et soient x un réel non nul et h un réel non nul tel que $x+h\neq 0$. Le taux de variation de f entre x et $x+h$ est :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}=\frac{\dfrac{x}{x(x+h)}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h}=\frac{-h}{x(x+h)}\times\frac{1}{h}=-\frac{1}{x(x+h)}.$$

Lorsque h tend vers 0, $x+h$ tend vers x donc $x(x+h)$ tend vers x^2 : le taux tend vers $-\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Autres fonctions. Le taux de variation entre x et $x+h$ vaut :

- pour la fonction constante : $\dfrac{c-c}{h}=0$, qui tend vers 0 (il n'y a rien à faire) ; pour la fonction identité : $\dfrac{x+h-x}{h}=1$, qui tend vers 1 (il n'y a pas plus à faire) ;
- pour la fonction cube : $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$, qui tend vers $3x^2$ (à retrouver !) ;
- pour la fonction racine carrée, avec $x>0$: $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$, qui tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (c'est peut-être la plus jolie preuve de toutes : on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$).

Pour les fonctions puissance et leurs inverses, c'est assez technique en première : le résultat est admis.

Exemple 1. Déterminer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (f_4 sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ et f_5 sur $[0\,;+\infty[$) par les expressions suivantes.

$$f_1(x)=2 \qquad f_2(x)=x^2 \qquad f_3(x)=x^4 \qquad f_4(x)=\frac{1}{x} \qquad f_5(x)=\sqrt{x}$$

Solution. D'après le théorème 1, on obtient :

$$f_1'(x)=0 \qquad f_2'(x)=2x \qquad f_3'(x)=4x^3 \qquad f_4'(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad f_5'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (pour } x>0)$$

III. Opérations sur les fonctions dérivables

Les fonctions de référence sont dérivables sur leur ensemble de définition (sauf la fonction racine carrée en 0). Qu'en est-il des fonctions construites à partir d'elles ? Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$: c'est la somme de deux fonctions de référence. Peut-on obtenir sa dérivée à partir de celles des fonctions carré et identité ? Il faut encore repasser par le taux de variation… Heureusement, on le fait une bonne fois pour toutes. Si $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\big(u(x+h)+v(x+h)\big)-\big(u(x)+v(x)\big)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

ce qui donne, lorsque h tend vers 0 (on reconnaît les taux de variation de u et de v) : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, ce qu'on note $f' = u' + v'$. Par exemple, si $f(x) = x^2 + x$ alors $f'(x) = 2x + 1$!

Mais il y a encore plus fort. Prenons $f(x) = x^3 + x + 1$ et cherchons le nombre dérivé $f'(5)$. On commence par déterminer la dérivée de f : pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1 + 0 = 3x^2 + 1$, et ainsi $f'(5) = 3 \times 5^2 + 1 = 76$. Et voilà, terminé en deux coups de cuiller à pot : c'est la fin des calculs fastidieux de taux de variation.

Un travail similaire peut être entrepris pour la différence, le produit par une constante, le produit, l'inverse et le quotient. Les résultats sont regroupés dans un tableau, qui constitue aussi une liste de théorèmes à connaître.

Théorème 2. u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Nature de la fonction	f	f'	Condition
somme	$u+v$	$u'+v'$	
différence	$u-v$	$u'-v'$	
produit par une constante	$k\,u$	$k\,u'$	
produit	$u\,v$	$u'\,v+u\,v'$	
inverse	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I
inverse généralisé	$\dfrac{k}{u}$	$-\dfrac{k\,u'}{u^2}$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I
quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$	$v(x)\neq 0$ pour tout x de I

Démonstration. **Produit.** Soit $f = u\,v$. Il faut s'accrocher : on retranche puis on ajoute $u(x) \times v(x+h)$ au numérateur.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(x+h)\times v(x+h) - u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)\times v(x+h) - u(x)\times v(x+h) + u(x)\times v(x+h) - u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h) + u(x)\times\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, les deux taux de variation tendent vers $u'(x)$ et $v'(x)$, et on admet que $v(x+h)$ tend vers $v(x)$. On obtient $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$, c'est-à-dire $f' = u'\,v + u\,v'$.

Autres opérations.

- *Somme, différence* : la somme a été traitée ci-dessus ; pour la différence, seul un signe change.
- *Produit par une constante* : si $f = k\,u$, le taux de variation de f vaut $k \times \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$, qui tend vers $k \times u'(x)$.
- *Inverse* : si $f = \dfrac{1}{u}$, le taux de variation de f vaut
$$\frac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h} = \frac{\dfrac{u(x)-u(x+h)}{u(x+h)\times u(x)}}{h} = -\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x+h)\times u(x)},$$ qui tend vers $-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$.
- *Inverse généralisé* : on écrit $\dfrac{k}{u} = k \times \dfrac{1}{u}$ et on utilise les deux résultats précédents.
- *Quotient* : on peut être astucieux, car $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ est un produit. Donc
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'\,v}{v^2} - \frac{u\,v'}{v^2} = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}.$$

Exemple 2. Déterminer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (f_5 sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$) par les expressions suivantes.
$$f_1(x) = x+2 \qquad f_2(x) = x^2 - x \qquad f_3(x) = 4x \qquad f_4(x) = x^2 + 5x + 2 \qquad f_5(x) = x^4 + \frac{1}{x}$$

Solution. D'après les théorèmes 1 et 2 (somme, différence, produit par une constante) :

- $f_1'(x) = 1 + 0 = 1$ (somme de la fonction identité et d'une constante) ;
- $f_2'(x) = 2x - 1$ (différence de la fonction carré et de la fonction identité) ;
- $f_3'(x) = 4 \times 1 = 4$ (produit de la fonction identité par la constante 4) ;
- $f_4'(x) = 2x + 5 \times 1 + 0 = 2x + 5$;
- $f_5'(x) = 4x^3 + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 4x^3 - \dfrac{1}{x^2}$ (pour $x \neq 0$).

Exemple 3. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)(3x-7)$.
Solution. $f(x)$ est un **produit**. On note : $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = 3x-7$. On a alors : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3$.
On obtient : $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = 2(3x-7) + (2x+3) \times 3 = 6x - 14 + 6x + 9 = 12x - 5$.
La dérivée de f est donc : $f'(x) = 12x - 5$.

Exemple 4. Déterminer la dérivée de la fonction f définie pour $x \neq 1{,}5$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$.
Solution. $f(x)$ est un **quotient**. On note : $u(x) = x+1$ et $v(x) = 2x-3$. On a alors : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$.
$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times (2x-3) - (x+1) \times 2}{(2x-3)^2} = \frac{2x - 3 - 2x - 2}{(2x-3)^2} = \frac{-5}{(2x-3)^2}$$
La dérivée de f est donc : $f'(x) = -\dfrac{5}{(2x-3)^2}$.