LA DÉRIVATION

1. POINT DE VUE LOCAL
2. POINT DE VUE GLOBAL
3. VARIATIONS ET EXTREMUMS

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« Plus la réalité que nous désirons connaître est riche et complexe, et plus aussi il est important de disposer de plusieurs “yeux” pour l’appréhender dans toute son ampleur et dans toute sa finesse. »

Alexandre Grothendieck

DU LOCAL AU GLOBAL

Le nombre dérivé est une notion **locale** : on se focalise sur un point particulier.
Pour la fonction carré ($f(x) = x^2$), le calcul du nombre dérivé en quelques points donne :

x	1	2	3	...	x
Nombre dérivé $f'(x)$	2	4	6	...	**?**

Peut-on prendre de la hauteur et trouver $f'(x)$ pour *tous* les réels x à la fois ?

Démonstration

Taux de variation de la fonction carré entre un réel x quelconque et $x+h$ (avec $h \neq 0$) :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux tend vers $2x$. Donc, pour tout réel x : $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est appelée **fonction dérivée de la fonction carré**.

Désormais : $f'(5) = 2 \times 5 = 10$ et $f'(-4) = 2 \times (-4) = -8$.

I. FONCTION DÉRIVÉE

I. FONCTION DÉRIVÉE

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

La fonction f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en chaque réel x de I.

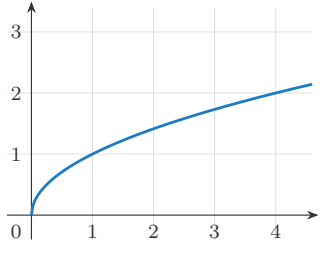
La fonction, notée f', qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.



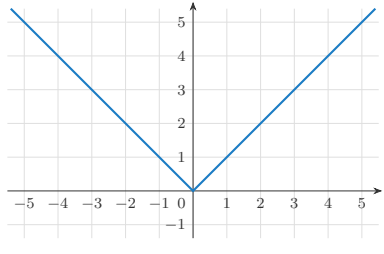
À l'usage, on dit « la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$ ».

I. FONCTION DÉRIVÉE

Rappel — deux fonctions **non dérivables en** 0



Racine carrée : la courbe « devient verticale » à l'origine.



Valeur absolue : la courbe garde la forme d'un « v ».

La fonction racine carrée est définie sur $[0\,;+\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0\,;+\infty[$.

II. FONCTIONS DÉRIVÉES
DE RÉFÉRENCE

Théorème 1

c désigne un nombre réel et n désigne un entier naturel non nul.

Fonction	Définie sur	$f(x)$	$f'(x)$	Dérivable sur
constante	$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$
identité	$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
carré	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
cube	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
puissance n	$\mathbb{R}$	x^n	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
inverse	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
racine carrée	$[0\,;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
inverse de puissance n	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

II. FONCTIONS DÉRIVÉES DE RÉFÉRENCE

Dérivée de la **fonction inverse** : si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ (pour $x \neq 0$).

Démonstration

Soient x un réel non nul et h un réel non nul tel que $x + h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Lorsque h tend vers 0, $x(x+h)$ tend vers x^2 : le taux tend vers $-\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

II. FONCTIONS DÉRIVÉES DE RÉFÉRENCE

Exemple 1

Déterminer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (f_4 sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ et f_5 sur $[0\,;+\infty[$) par les expressions suivantes.

$$f_1(x)=2 \qquad f_2(x)=x^2 \qquad f_3(x)=x^4 \qquad f_4(x)=\frac{1}{x} \qquad f_5(x)=\sqrt{x}$$

III. OPÉRATIONS
SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

III. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Comment dériver une somme de fonctions de référence, comme $f(x) = x^2 + x$?

Démonstration

Si $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\big(u(x+h) + v(x+h)\big) - \big(u(x) + v(x)\big)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0 : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, ce qu'on note $\boldsymbol{f' = u' + v'}$.

Théorème 2

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

Nature de la fonction	f	f'	Condition
somme	$u+v$	$u'+v'$	
différence	$u-v$	$u'-v'$	
produit par une constante	$k\,u$	$k\,u'$	
produit	$u\,v$	$u'\,v+u\,v'$	
inverse	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I
inverse généralisé	$\dfrac{k}{u}$	$-\dfrac{k\,u'}{u^2}$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I
quotient	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$	$v(x)\neq 0$ pour tout x de I

III. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Dérivée d'un **produit** : si $f = u\,v$ alors $f' = u'\,v + u\,v'$.

Démonstration

On retranche puis on ajoute $u(x) \times v(x+h)$ au numérateur :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{u(x+h)\times v(x+h) - u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)\times v(x+h) - u(x)\times v(x+h) + u(x)\times v(x+h) - u(x)\times v(x)}{h}\\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h) + u(x)\times\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, les deux taux tendent vers $u'(x)$ et $v'(x)$, et on admet que $v(x+h)$ tend vers $v(x)$: $f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$.

III. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Exemple 2

Déterminer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (f_5 sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$) par les expressions suivantes.

$$f_1(x) = x + 2 \qquad f_2(x) = x^2 - x \qquad f_3(x) = 4x$$

$$f_4(x) = x^2 + 5x + 2 \qquad f_5(x) = x^4 + \frac{1}{x}$$

III. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Exemple 3

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)(3x - 7)$.

III. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Exemple 4

Déterminer la dérivée de la fonction f définie pour $x \neq 1{,}5$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$.

Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ Vérification de la partie 1

La définition et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

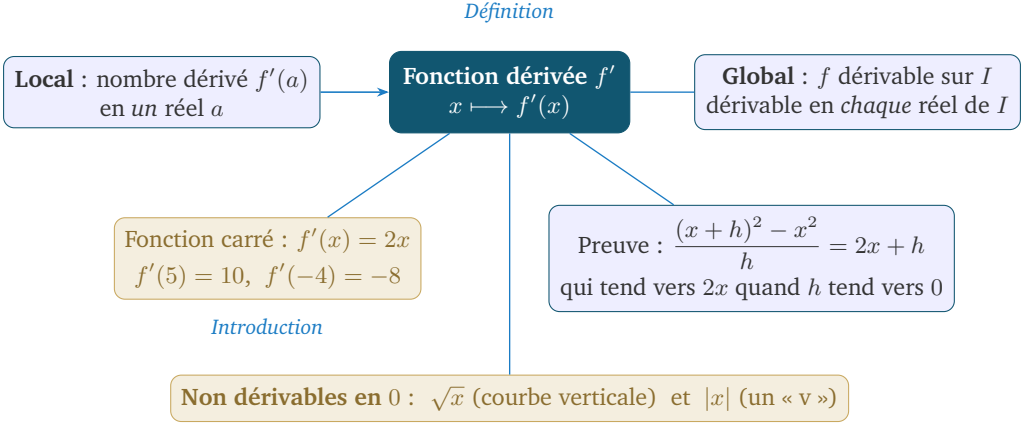
Partie 2

Revoir le cours

Une diapositive par section, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. FONCTION DÉRIVÉE

en une diapositive



II. FONCTIONS DÉRIVÉES DE RÉFÉRENCE

en une diapositive

Théorème 1 — c réel, n entier naturel non nul

constante

$$c \longmapsto \mathbf{0}$$

identité

$$x \longmapsto \mathbf{1}$$

carré

$$x^2 \longmapsto \mathbf{2x}$$

cube

$$x^3 \longmapsto \mathbf{3x^2}$$

puissance n

$$x^n \longmapsto \boldsymbol{n\,x^{n-1}}$$

inverse

$$\frac{1}{x} \longmapsto -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2}}$$

racine carrée

$$\sqrt{x} \longmapsto \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{x}}}$$

inverse de puissance n

$$\frac{1}{x^n} \longmapsto -\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{x^{n+1}}}$$

$\sqrt{x}$: dérivable sur $]0\,;+\infty[$ seulement

$\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^n}$: pour $x \neq 0$

Exemple 1 : $x^4 \longmapsto 4x^3$

III. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

en une diapositive

Théorème 2

Somme, différence
$(u \pm v)' = u' \pm v'$

Produit par une constante
$(k\,u)' = k\,u'$

Produit
$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

Pour dériver : reconnaître la forme de f

$x^2 + 5x + 2 \longmapsto 2x + 5$

Exemple 2

$(2x+3)(3x-7) \longmapsto 12x - 5$

Exemple 3

Inverse
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2} \quad \left(\dfrac{k}{u}\right)' = -\dfrac{k\,u'}{u^2}$

$\dfrac{x+1}{2x-3} \longmapsto -\dfrac{5}{(2x-3)^2}$

Exemple 4

Quotient
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les quatre exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier B — La carte des dérivées

Atelier G — Dix jours pour une formule

Atelier H — Cap sur l'EAM