Londres, 1887. Miss Ada Whitlock dirige seule la fabrique de thé de son père.

Vingt caisses expédiées ce soir ! Et on m'en commande une vingt-et-unième… Dois-je la préparer ?

Un instant, Miss Whitlock. Produire q caisses vous coûte, en livres, $C(q) = 0{,}1q^2 + 2q + 40$.

$C(q) = 0{,}1q^2 + 2q + 40$

Question 1.
Calculer $C(20)$ et $C(21)$.
Combien coûte réellement la fabrication de la 21e caisse ?

Trop long, Un mathématicien dérive : le coût marginal, c'est $C'(q)$.

Question 2. Déterminer $C'(q)$, puis calculer $C'(20)$. Comparer avec la réponse à la question 1.

Je vends chaque caisse 7 livres !

Question 3. Pour quelles valeurs de q a-t-on $C'(q) < 7$? Miss Whitlock a-t-elle intérêt à préparer la 21e caisse ?

Un dernier problème avant de nous revoir. Le coût moyen d'une caisse est $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

Un quotient ?!

Question 4. Montrer que $M'(q) = 0{,}1 - \dfrac{40}{q^2}$.

Question 5. Calculer $M'(20)$. Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe de M au point d'abscisse 20 ?

ATELIER F

La 21^e caisse

Objectifs : Interpréter le nombre dérivé comme un coût marginal ; dériver un quotient.
Durée : 30 minutes — sans calculatrice

Consignes

Les données et les cinq questions sont dans les bulles et les cases de la planche, au recto : lisez-la dans l'ordre et répondez sur votre cahier, en justifiant. Allez ensuite chercher le corrigé. Les aides sont en bas de la page.

Aide au calcul

$21^2 = 441$

★ AIDES ★

1. Remplacer q par 20, puis par 21, dans l'expression de $C(q)$. La 21^e caisse coûte $C(21) - C(20)$. *Contrôle* : $C(20) = 120$.

2. *Voir les théorèmes 1 et 2 et l'exemple 2*, où l'on dérive terme à terme. *Contrôle* : $C'(10) = 4$.

3. Résolvez l'inéquation $0{,}2q + 2 < 7$ comme une équation : on retranche 2, puis on divise par $0{,}2$, c'est-à-dire qu'on multiplie par 5.

4. *Voir le théorème 2 et l'exemple 4* : $M = \dfrac{u}{v}$ avec $u(q) = C(q)$ et $v(q) = q$. Développez le numérateur : il vaut $0{,}1q^2 - 40$.

5. Le nombre dérivé $M'(20)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 20. *Contrôle* : $\dfrac{40}{400} = 0{,}1$.