Second degré : forme canonique et équations

Cours

« Si vous ne pouvez pas résoudre un problème, alors il existe un problème plus simple que vous pouvez résoudre : trouvez-le. »

George Pólya, d'après *How to Solve It*, 1945

Dans tout ce chapitre, f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$: a, b et c sont ses **coefficients**.

I. Forme canonique d'un polynôme

Théorème 1. Soit f une fonction polynôme du second degré, avec a le coefficient de x^2.
Il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Démonstration. Pour tout réel x, comme $a \neq 0$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En notant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient la forme recherchée.

Définition 1. Soit f une fonction polynôme du second degré.
La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ de $f(x)$ est appelée la **forme canonique** du polynôme.

Méthode : compléter le carré

Pour tout réel k, on a $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$, donc :

$$x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$$

Pour écrire la forme canonique, on reconnaît dans $x^2 + 2kx$ le début du carré $(x+k)^2$, puis on retranche k^2.
Par exemple, $x^2 - 6x$ est le début de $(x-3)^2$: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.

Exemple 1. Écrire sous forme canonique le polynôme $x^2 - 4x + 8$.

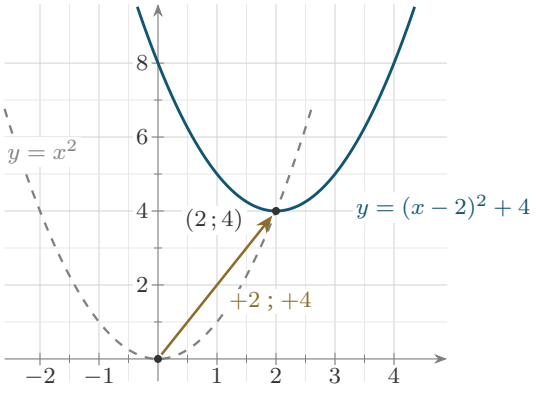
Solution. $x^2 - 4x$ est le début de $(x-2)^2$, donc $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$. Ainsi :

$$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 - 4 + 8 = (x-2)^2 + 4$$

Remarque (extremum). La forme canonique donne l'extremum du polynôme. Pour tout réel x, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$, et ce carré est nul pour $x = \alpha$:

- si $a > 0$, alors $f(x) \geqslant \beta$: f admet un **minimum** égal à β, atteint en α ;
- si $a < 0$, alors $f(x) \leqslant \beta$: f admet un **maximum** égal à β, atteint en α.

Dans l'exemple 1, $a = 1 > 0$: le polynôme $x^2 - 4x + 8$ admet un minimum égal à 4, atteint en 2.



Remarque (courbes). La courbe de la fonction $x \longmapsto f(x-m)$ s'obtient en décalant celle de f de m unités horizontalement (vers la droite si $m > 0$, vers la gauche si $m < 0$). Ainsi, la courbe de $x \longmapsto (x-2)^2 + 4$ est celle de $x \longmapsto x^2$ décalée de 2 vers la droite, puis de 4 vers le haut.

II. Équations du second degré

Définition 2. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.
Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du polynôme et il est noté Δ.

Δ se lit « delta », c'est la lettre majuscule « d » en grec.

Théorème 2. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.
Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ permet de déterminer le nombre de racines du polynôme :

- si $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines égales à $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, le polynôme admet une unique racine (une racine double) égale à $-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet aucune racine.

Démonstration. D'après la démonstration du théorème 1, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, ce qui donne, en divisant par $a \neq 0$: $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{(2a)^2}$. On raisonne par **disjonction des cas**, selon le signe de Δ (le nombre $(2a)^2$ est strictement positif) :

- si $\Delta < 0$, on cherche x tel que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < 0$, ce qui est impossible : il n'y a aucune solution ;
- si $\Delta = 0$, on cherche x tel que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ce qui donne $x + \dfrac{b}{2a} = 0$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$, on cherche x tel que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, ce qui donne $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x^2 - 2x + 3 = 0$ et $x^2 - x - 1 = 0$.

Solution. Résolvons l'équation $2x^2 - 2x + 3 = 0$. On reconnaît une équation du second degré mais aucune solution n'est évidente. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 4 - 24 = -20$$

$\Delta < 0$ donc, d'après le théorème 2, l'équation $2x^2 - 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution : l'ensemble des solutions est l'ensemble vide, noté $S = \varnothing$.

Résolvons maintenant l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. On reconnaît aussi une équation du second degré mais là encore, aucune solution n'est évidente. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

$\Delta > 0$ donc, d'après le théorème 2, l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

III. Factorisation d'un polynôme

Théorème 3. Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients et Δ son discriminant :

- si $\Delta > 0$, la forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 désignent les deux racines de f ;
- si $\Delta = 0$, la forme factorisée est $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 désigne la racine double de f ;
- si $\Delta < 0$, la forme factorisée de $f(x)$ n'existe pas.

Exemple 3. Factoriser si possible la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$.

Solution. On reconnaît une fonction polynôme du second degré mais aucune racine n'est évidente. Calculons son discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64$$

$\Delta > 0$ donc, d'après le théorème 2, la fonction admet deux racines distinctes :

$$\frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 4} = \frac{4+8}{8} = 1{,}5 \quad \text{et} \quad \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 4} = \frac{4-8}{8} = -0{,}5$$

D'après le théorème 3, la forme factorisée de la fonction f est donc : $f(x) = 4(x + 0{,}5)(x - 1{,}5)$.
Vérifions : $4(x + 0{,}5)(x - 1{,}5) = 4\left(x^2 - 1{,}5x + 0{,}5x - 0{,}75\right) = 4\left(x^2 - x - 0{,}75\right) = 4x^2 - 4x - 3$.

IV. Signe d'un polynôme

Théorème 4. Soient f une fonction polynôme du second degré et Δ son discriminant :

- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du même signe que a à l'extérieur des racines, de signe opposé à a entre les racines ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du même signe que a sur $\mathbb{R}$ (sauf en $-\dfrac{b}{2a}$ où $f(x) = 0$) ;
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du même signe que a sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4. Donner le signe de la fonction f définie à l'exemple 3.

Solution. Le coefficient $a = 4$ est positif et la fonction polynôme du second degré f admet $-0{,}5$ et $1{,}5$ comme racines, donc, d'après le théorème 4, $f(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Méthode : choisir la forme adaptée

Pour conclure sur l'étude algébrique des fonctions polynômes du second degré, dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations), on cherche d'abord la forme du polynôme la plus adaptée :

Forme	**Elle sert à...**
forme développée réduite $ax^2 + bx + c$	calculer une image comme $f(0)$, calculer Δ, dériver
forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$	trouver l'extremum et la valeur où il est atteint
forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ (si elle existe)	résoudre $f(x) = 0$, étudier le signe, résoudre une inéquation