SECOND DEGRÉ :
FORME CANONIQUE ET ÉQUATIONS

I. FORME CANONIQUE D'UN POLYNÔME

II. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

III. FACTORISATION D'UN POLYNÔME

IV. SIGNE D'UN POLYNÔME

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« Si vous ne pouvez pas résoudre un problème, alors il existe un problème plus simple que vous pouvez résoudre : trouvez-le. »

— George Pólya, d'après *How to Solve It*, 1945

SECOND DEGRÉ : FORME CANONIQUE ET ÉQUATIONS

I. FORME CANONIQUE D'UN POLYNÔME

Théorème 1

Soit f une fonction polynôme du second degré, avec a le coefficient de x^2.
Il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Définition 1

Soit f une fonction polynôme du second degré.
La forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ de $f(x)$ est appelée la **forme canonique** du polynôme.

Exemple 1

Écrire sous forme canonique le polynôme $x^2 - 4x + 8$.

Méthode : compléter le carré

Pour tout réel k : $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$, donc

$$x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$$

On reconnaît dans $x^2 + 2kx$ le **début du carré** $(x+k)^2$, puis on retranche k^2.
Par exemple : $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.

Remarque : l'extremum

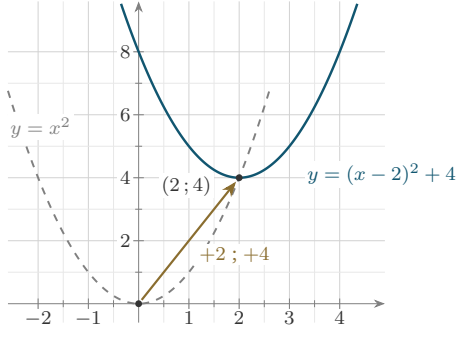
Pour tout réel x, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$, et ce carré est nul pour $x = \alpha$:

- si $a > 0$, f admet un **minimum** égal à β, atteint en α ;
- si $a < 0$, f admet un **maximum** égal à β, atteint en α.

Remarque : les courbes

La courbe de $x \longmapsto f(x-m)$ s'obtient en décalant celle de f de m unités **horizontalement** (vers la droite si $m > 0$, vers la gauche si $m < 0$).

La courbe de $x \longmapsto (x-2)^2 + 4$ est celle de $x \longmapsto x^2$ décalée de 2 vers la droite, puis de 4 vers le haut.



II. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Définition 2

Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.
Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du polynôme et il est noté Δ.

Δ se lit « delta », c'est la lettre majuscule « d » en grec.

Théorème 2

Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients.
Le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ permet de déterminer le nombre de racines du polynôme :

- si $\Delta > 0$, le polynôme admet **deux racines** égales à $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, le polynôme admet **une unique racine** (une racine double) égale à $-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, le polynôme n'admet **aucune racine**.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $2x^2 - 2x + 3 = 0$ et $x^2 - x - 1 = 0$.

Démonstration du théorème 2 (au programme)

D'après le théorème 1, $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{(2a)^2}$, avec $(2a)^2 > 0$.

On raisonne par **disjonction des cas**, selon le signe de Δ :

- si $\Delta < 0$: un carré ne peut pas être strictement négatif, **aucune solution** ;
- si $\Delta = 0$: $x + \dfrac{b}{2a} = 0$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta > 0$: $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

III. FACTORISATION D'UN POLYNÔME

Théorème 3

Soit f une fonction polynôme du second degré avec a, b et c ses coefficients et Δ son discriminant :

- si $\Delta > 0$, la **forme factorisée** est $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 désignent les deux racines de f ;
- si $\Delta = 0$, la **forme factorisée** est $f(x) = a(x-x_0)^2$ où x_0 désigne la racine double de f ;
- si $\Delta < 0$, la forme factorisée de $f(x)$ **n'existe pas**.

Exemple 3

Factoriser si possible la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$.

IV. SIGNE D'UN POLYNÔME

Théorème 4

Soient f une fonction polynôme du second degré et Δ son discriminant :

- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du **même signe que a à l'extérieur des racines**, de signe opposé à a entre les racines ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du **même signe que a** sur $\mathbb{R}$ (sauf en $-\dfrac{b}{2a}$ où $f(x) = 0$) ;
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du **même signe que a** sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4

Donner le signe de la fonction f définie à l'exemple 3.

Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ Vérification de la partie 1

Les définitions et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

Partie 2

Revoir le cours

Une diapositive par partie, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. FORME CANONIQUE

en une diapositive

Compléter le carré

$x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$

$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$

Courbe

$x \longmapsto f(x-m)$: la courbe de f décalée de m horizontalement

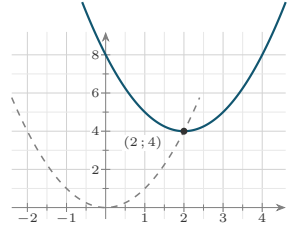
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

forme canonique

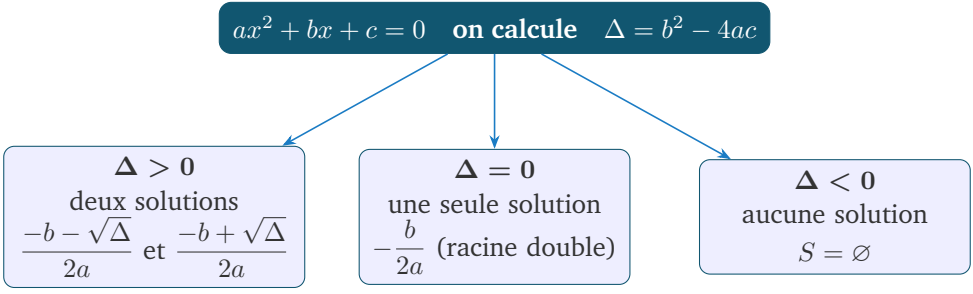
Extremum

$a > 0$: minimum β en α

$a < 0$: maximum β en α



II. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ *en une diapositive*



Disjonction des cas : trois cas qui ne se recoupent pas et couvrent toutes les possibilités, d'où trois conclusions.

III. FACTORISATION *en une diapositive*

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de forme factorisée

Pour...	**on choisit la forme...**
calculer $f(0)$, calculer Δ, dériver	développée réduite $ax^2 + bx + c$
trouver l'extremum	canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$
résoudre $f(x) = 0$, étudier le signe	factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$

IV. SIGNE D'UN POLYNÔME *en une diapositive*

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$	signe de a		0	signe de a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Toujours le signe de a, sauf entre les deux racines.

Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les quatre exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier G — Le bug des parenthèses

Atelier H — Cap sur l'EAM

Z — Forme canonique

Y — Équations

X — Forme adaptée