Séance 1 — 55 min. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier. Démonstration au programme : la résolution de l'équation du second degré (diapositive 6).

Page de garde — Partie 1 *2 min*

Anecdote George Pólya (1887–1985), mathématicien hongrois, a rassemblé dans *How to Solve It* ses conseils pour chercher : « connaissez-vous un problème voisin ? », « pouvez-vous résoudre une partie du problème ? ». C'est exactement l'idée du chapitre : on ramène toute équation du second degré à un carré, $(x+k)^2 = \dots$, que l'on sait résoudre. *(G. Pólya,* How to Solve It, *Princeton University Press, 1945)*

1. I. Forme canonique — Théorème 1, définition 1, exemple 1 *8 min*

Au tableau **Ex. 1** : $x^2 - 4x$ est le début de $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, donc $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ et

$$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 - 4 + 8 = (x-2)^2 + 4 \quad (a=1,\, \alpha=2,\, \beta=4).$$

Vérification en développant : $(x-2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$. Annoncer que la diapositive suivante généralise ce « début de carré ».

Anecdote Vers 820, à Bagdad, al-Khwârizmî résout « un carré et dix racines égalent trente-neuf dirhams », soit $x^2 + 10x = 39$, en complétant un carré dessiné : $(x+5)^2 = 64$, d'où $x = 3$. Le titre de son livre, *al-jabr*, a donné le mot « algèbre », et son nom le mot « algorithme ». *(al-Khwârizmî,* Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison, *trad. F. Rosen, 1831 ; MacTutor, « Al-Khwarizmi »)*

2. Méthode : compléter le carré ; remarque sur l'extremum *6 min*

Au tableau Justifier l'identité en développant : $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$, donc $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$. Deuxième exemple, celui de l'activité d'origine : $x^2 - 6x = 91 \iff (x-3)^2 - 9 = 91 \iff (x-3)^2 = 100 \iff x - 3 = 10$ ou $x - 3 = -10$, soit $x = 13$ ou $x = -7$.
Extremum de l'exemple 1 : $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - 4x + 8 \geqslant 4$, et l'égalité a lieu pour $x = 2$: **minimum** 4**, atteint en** 2. Contre-exemple oral : $-(x-1)^2 + 3 \leqslant 3$, maximum 3 atteint en 1.

Anecdote Al-Khwârizmî ne retenait que la solution positive, 13 : les nombres négatifs n'étaient pas admis comme solutions. Sept siècles plus tard, dans l'*Ars Magna* (1545), Cardan écrit encore les solutions négatives à part et les appelle « fictives ». *(MacTutor, « Al-Khwarizmi » ; G. Cardano,* Ars Magna, *1545)*

3. Remarque : la courbe de $x \longmapsto f(x-m)$ *4 min*

Au tableau Avec $f(x) = x^2$ et $m = 2$: $f(x-2) = (x-2)^2$. Le point $(a\,;f(a))$ de la courbe de f devient le point $(a+2\,;f(a))$: on décale de 2 **vers la droite** (et non vers la gauche, malgré le signe moins). Ajouter 4 décale ensuite de 4 vers le haut : le point le plus bas passe de $(0\,;0)$ à $(2\,;4)$, ce qui confirme le minimum de l'exemple 1.

4. II. Équations — Définition 2 *3 min*

Au tableau $\Delta = b^2 - 4ac$ se calcule sur la **forme développée réduite**. Rappeler les parenthèses autour d'un b négatif : avec $b = -2$, $b^2 = (-2)^2 = 4$ et non -4.

Anecdote Le mot « discriminant » est dû au mathématicien anglais James Joseph Sylvester, en 1851 : ce nombre « discrimine », c'est-à-dire distingue, les cas possibles pour les solutions. *(MacTutor, « Sylvester's Discriminant »)*

5. Théorème 2, exemple 2 — *8 min*

Au tableau $2x^2 - 2x + 3 = 0$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 4 - 24 = -20 < 0$, donc aucune solution : $S = \varnothing$ (notation nouvelle : l'ensemble vide).
$x^2 - x - 1 = 0$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$, donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} ; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

On garde les valeurs exactes : pas de calculatrice.

Anecdote La solution positive $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ est le *nombre d'or*. Euclide le définit déjà, sans formule, comme le partage d'un segment « en extrême et moyenne raison ». *(Euclide,* Éléments*, livre VI, définition 3)*

6. Démonstration du théorème 2 (au programme) — *8 min*

Au tableau Écrire les étapes : $ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 0 \iff \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$, le dénominateur $4a^2 = (2a)^2$ étant strictement positif.
Nommer le raisonnement : **disjonction des cas**. Les trois cas $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ ne se recoupent pas et couvrent toutes les possibilités ; chacun donne sa conclusion. Pour $\Delta > 0$, rappeler que $X^2 = k$ avec $k > 0$ donne $X = \sqrt{k}$ ou $X = -\sqrt{k}$.

7. III. Factorisation — Théorème 3, exemple 3 — *7 min*

Au tableau $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2$.

$$x_1 = \frac{4 - 8}{8} = -0{,}5 \qquad x_2 = \frac{4 + 8}{8} = 1{,}5 \qquad f(x) = 4(x + 0{,}5)(x - 1{,}5)$$

Insister sur le coefficient $a = 4$ devant, et sur le signe : la racine $-0{,}5$ donne le facteur $x - (-0{,}5) = x + 0{,}5$. Vérifier en développant : $4\left(x^2 - x - 0{,}75\right) = 4x^2 - 4x - 3$.
Lien avec le chapitre 101 : somme $-0{,}5 + 1{,}5 = 1 = -\dfrac{b}{a}$, produit $-0{,}75 = \dfrac{c}{a}$.

8. IV. Signe — Théorème 4, exemple 4 — *7 min*

Au tableau $a = 4 > 0$, racines $-0{,}5$ et $1{,}5$: $f(x)$ est du signe de a, donc positif, à l'extérieur des racines, et négatif entre elles. Ce théorème prolonge le théorème 6 du chapitre 101 : le cas nouveau est $\Delta < 0$, où $f(x)$ ne change jamais de signe.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	