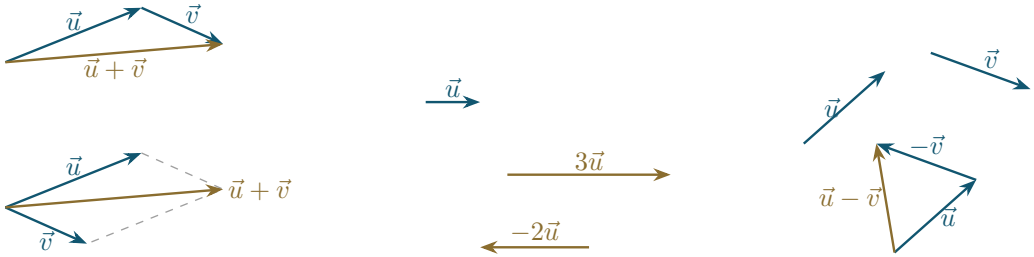
Produit scalaire : un nouvel outil

Cours

« L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite, la géométrie n'est qu'une algèbre figurée. »

Sophie Germain, *Pensées diverses* (*Œuvres philosophiques*, 1879)

Depuis le collège et la classe de seconde, les vecteurs sont manipulés à l'aide de deux opérations : la somme de deux vecteurs (avec la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme) et le produit d'un vecteur par un nombre réel. En combinant ces deux opérations, on peut aussi calculer la différence de deux vecteurs.



Somme | Multiplication par un réel | Différence

Ces opérations ont un point commun : elles produisent un nouveau vecteur. Nous allons maintenant étudier une opération d'une autre nature, appelée le **produit scalaire** : le produit scalaire de deux vecteurs ne donne pas un vecteur mais un **nombre réel**. L'adjectif *scalaire* signifie d'ailleurs dans ce contexte « réel ». En physique, par exemple, le travail d'une force dépend à la fois de deux vecteurs et de l'angle qu'ils forment : c'est ce type de situation que le produit scalaire va permettre de modéliser.

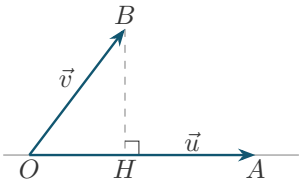
I. Deux expressions du produit scalaire

A. Par projection orthogonale

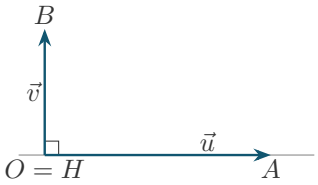
On rappelle que le **projeté orthogonal** d'un point B sur une droite (OA) est le point H de la droite (OA) tel que $(BH) \perp (OA)$.

Définition 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Le **produit scalaire** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est un nombre réel défini ainsi :

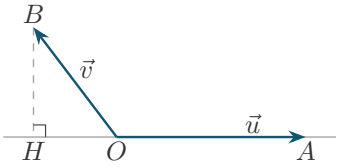
- si l'un des deux vecteurs est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- si aucun des deux vecteurs n'est nul, alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA) :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

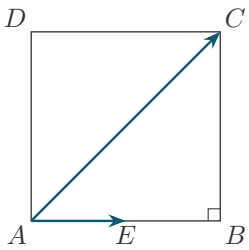


$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs qui n'ont pas la même origine, il faut donc commencer par se ramener à deux vecteurs de même origine. Le produit scalaire est une opération qui, à deux vecteurs, associe un nombre réel. À ce stade, c'est l'extrémité B du second vecteur que l'on projette sur la droite (OA) : rien n'indique pour l'instant qu'en permutant les deux vecteurs, et en projetant A sur la droite (OB), on obtienne le même résultat.

Notations. Le produit scalaire est noté avec un point : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. La multiplication des réels (comme deux longueurs) est notée avec le signe $\times$: $OA \times OH$. Le produit d'un vecteur par un réel est noté sans signe : $4\overrightarrow{OA}$. La somme de deux vecteurs, comme celle de deux réels, est notée avec le signe $+$: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Exemple 1. On considère un carré $ABCD$ de côté 5 et E le milieu de $[AB]$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Solution. Le point B est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AE) et les points E et B sont du même côté du point A, donc :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = AE \times AB = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$$

En conclusion : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 12{,}5$.

Un premier cas particulier apparaît lorsque les deux vecteurs sont égaux. Ce cas sera souvent rencontré et possède un vocabulaire spécifique.

Définition 2. Le **carré scalaire** de $\overrightarrow{OA}$ est : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^2 = OA^2$. Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Rappel : la **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ est sa longueur. Elle est notée $\|\vec{u}\|$.

Exemple 2. On considère un carré $ABCD$ de côté 3. Calculer le carré scalaire de $\overrightarrow{AC}$.

Solution. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $\overrightarrow{AC}^2 = AC^2 = 18$. En conclusion : $\overrightarrow{AC}^2 = 18$.

B. À l'aide des normes et d'un angle

La définition du cosinus d'un angle, étendue aux angles aigus, droits et obtus, permet de réunir les trois cas de la définition 1 en une expression unique du produit scalaire.

Théorème 1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

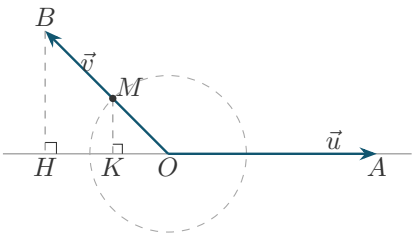
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

Démonstration. On reprend les notations de la définition 1 et on montre que la formule est vraie dans les trois cas.

Angle $\widehat{AOB}$ aigu. Le triangle OBH est rectangle en H, donc $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = \dfrac{OH}{OB}$, soit $OH = OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$, d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$.

Angle droit. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$: les deux membres sont nuls (attention, la trigonométrie du triangle rectangle ne s'applique pas : c'est la définition étendue du cosinus).

Angle obtus (figure ci-contre). Dans le repère d'origine O dont l'axe des abscisses est (OA), on note M le point d'intersection du cercle trigonométrique avec la demi-droite $[OB)$ et K son projeté orthogonal sur (OA). Le cosinus est l'abscisse de M, qui est négative : $\cos\left(\widehat{AOB}\right) = -OK$.



D'après le théorème de Thalès, les droites (HB) et (KM) étant parallèles, $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OK}{OH}$; comme $OM = 1$, on obtient $OH = OB \times OK = -OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$, d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$.

Exemple 3. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Solution. D'après le théorème 1 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4 \times 5 \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 20 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -10$.

En conclusion : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$.

II. Caractérisation de l'orthogonalité

Définition 3. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Théorème 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux } \textbf{si et seulement si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Démonstration. Directe d'après la définition 1 (cas d'un vecteur nul et cas de l'angle droit).

Ce théorème permet de prouver une perpendicularité par un calcul, comme la réciproque du théorème de Pythagore. Rappelons que le déterminant permet, lui, de prouver une colinéarité (un parallélisme) : $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ sont colinéaires si et seulement si $ab' - a'b = 0$. Prouver une perpendicularité ou un parallélisme par des calculs se révèle très utile lorsque les méthodes purement géométriques échouent : transformer un problème de géométrie en un problème algébrique, pour déployer toute la puissance du calcul, est une des forces des mathématiques.

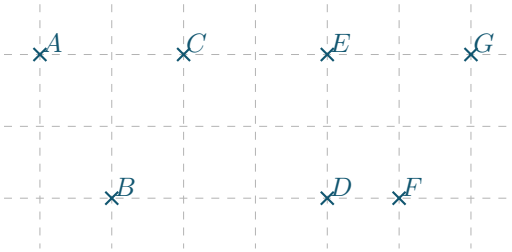
III. Propriétés du produit scalaire

Théorème 3 (symétrie). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Démonstration. Soient O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. D'après le théorème 1 (le résultat est évident si l'un des vecteurs est nul) : $\vec{v} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos\left(\widehat{AOB}\right) = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exemple 4. L'unité de longueur est le côté d'un carreau du quadrillage. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.



Solution. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ et le projeté orthogonal du point B sur la droite (AE) est le milieu du segment $[AC]$, du même côté de A que E, donc : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 1 = 4$. En conclusion : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 4$.

Théorème 4. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan, et a un réel.

$$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = a \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Démonstration. Si $a = 0$, tous les membres sont égaux à 0. Nous donnons le cas $a > 0$, en supposant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $a\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$, donc $\cos(a\vec{u}\,;\vec{v}) = \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$, et $\|a\vec{u}\| = a \times \|\vec{u}\|$. D'après le théorème 1 :

$$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \|a\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(a\vec{u}\,;\vec{v}) = a \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = a \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

et de même pour $\vec{u} \cdot (a\vec{v})$. Le cas $a < 0$ est admis.

Pour $a = -1$:

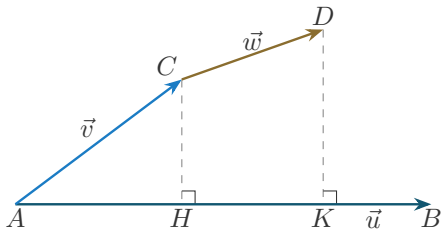
$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

ce qui donne plus concrètement, si l'origine d'un vecteur est l'extrémité de l'autre :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(-\overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Théorème 5 (distributivité). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan.

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$



Illustration, dans le cas où tous les produits scalaires sont positifs, avec $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$:
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AK$,
$\vec{u}\cdot\vec{v} = AB\times AH$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = AB\times HK$,
avec $AK = AH+HK$.

Ces propriétés de symétrie et de distributivité permettent de prouver la « double distributivité » du produit scalaire sur l'addition des vecteurs et les « identités remarquables » correspondantes.

Théorème 6 (double distributivité). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ des vecteurs du plan.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z}) = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z}$$

Démonstration. D'après les théorèmes 5 et 3 : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z}) = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{z} = \vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{z}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{z}\cdot\vec{u}+\vec{z}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z}$.

Théorème 7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\times\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\times\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 \qquad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$$

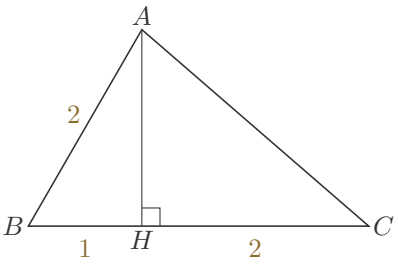
Démonstration. On utilise, comme pour les identités remarquables en algèbre, la double distributivité et la symétrie.

Théorème 8. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs du plan.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+2\times\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2 \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2-2\times\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

Démonstration. D'après la définition 2, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2$, $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}^2$: on applique le théorème 7. De même pour $\vec{u}-\vec{v}$.

Exemple 5. On cherche à savoir si le triangle ABC ci-contre est rectangle en A.



1. Développer puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$.
2. En déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$.
3. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Solution.

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB^2-BC\times BH = 2^2-3\times 1 = 1$.
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles), donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = 1$.
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\neq 0$, donc, d'après le théorème 2, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux : le triangle ABC n'est pas rectangle en A.