# PRODUIT SCALAIRE : UN NOUVEL OUTIL

I. DEUX EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

II. CARACTÉRISATION DE L'ORTHOGONALITÉ

III. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

*Partie 1*

# Découvrir le cours

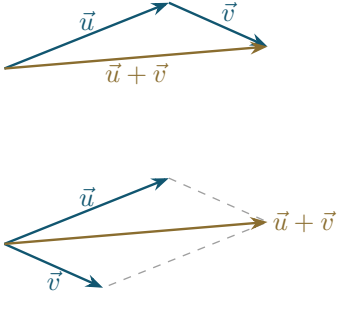
*Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.*

*« L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite, la géométrie n'est qu'une algèbre figurée. »*

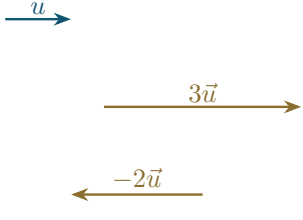
— Sophie Germain, *Pensées diverses* (*Œuvres philosophiques*, 1879)

# PRODUIT SCALAIRE : UN NOUVEL OUTIL

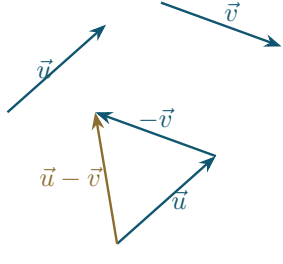
## Ce qu'on sait faire avec des vecteurs




Somme




Multiplication par un réel



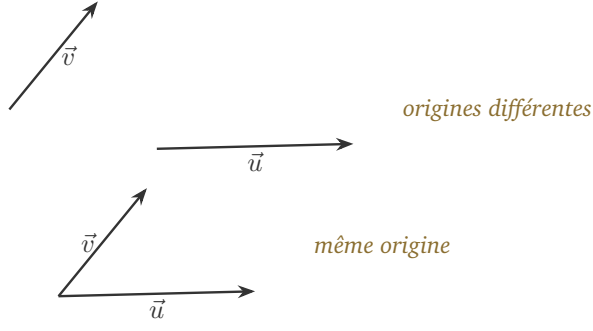

Différence

# I. DEUX EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

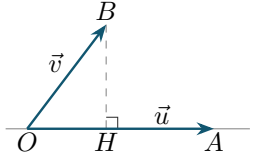
## A. Par projection orthogonale

**Définition 1**

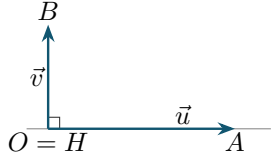
Le **produit scalaire** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est :



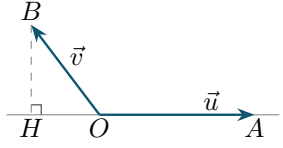
## Définition 1 (suite)



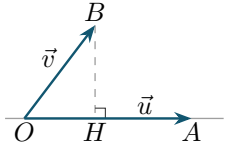

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$



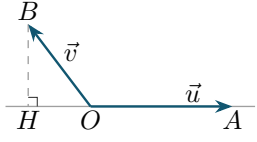

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$




$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$




$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$




$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

**Exemple 1**

On considère un carré $ABCD$ de côté $5$ et $E$ le milieu de $[AB]$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**Définition 2**

Le **carré scalaire** de $\overrightarrow{OA}$ est : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^2 = OA^2$.

Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

**Exemple 2**

On considère un carré $ABCD$ de côté $3$. Calculer le carré scalaire de $\overrightarrow{AC}$.

## B. À l'aide des normes et d'un angle

**Théorème 1**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

**Exemple 3**

$ABC$ est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

## II. CARACTÉRISATION DE L'ORTHOGONALITÉ

**Définition 3**

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

**Théorème 2**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** **si et seulement si** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

## III. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

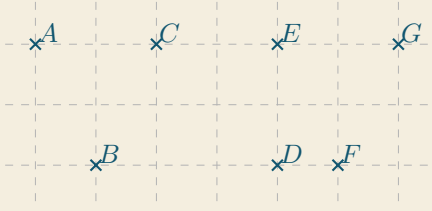
**Théorème 3 (symétrie)**

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

**Exemple 4**

L'unité de longueur est le côté d'un carreau du quadrillage.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$.



**Théorème 4**

$a$ est un réel quelconque.

$$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = a \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Pour $a = -1$ :

$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

ce qui donne plus concrètement, si l'origine d'un vecteur est l'extrémité de l'autre :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot \left( - \overrightarrow{AC} \right) = - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

**Théorème 5 (distributivité)**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

**Théorème 6 (double distributivité)**

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$$

**Théorème 7**

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} \qquad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$$

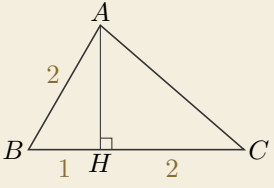
**Rappel :** $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

**Théorème 8**

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \qquad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

**Exemple 5**

On cherche à savoir si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.




**1.** Développer puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$.

**2.** En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$.

**3.** Le triangle $ABC$ est-il rectangle en $A$ ?

# Vérification

## Partie 1 — juste après le cours

### → Vérification de la partie 1

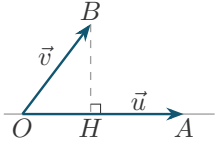
*Les définitions et les théorèmes qui viennent d'être présentés.*

*Partie 2*

# Revoir le cours

*Une diapositive par partie, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.*

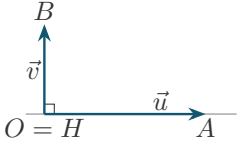
## I. DEUX EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE *en une diapositive*




angle aigu

$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH > 0$

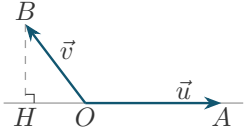
$\cos > 0$




angle droit

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\cos = 0$




angle obtus

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH < 0$

$\cos < 0$

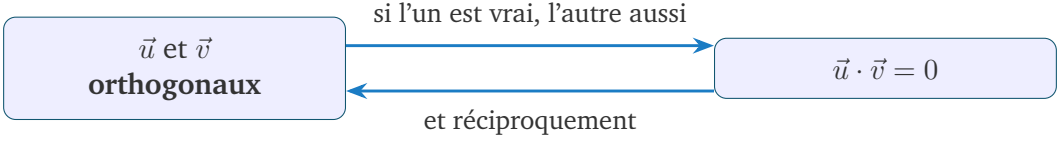
Une seule formule pour les trois cas (Th. 1) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

Le carré scalaire (Déf. 2) : $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$

Le résultat est **un nombre réel**, pas un vecteur.

## II. CARACTÉRISATION DE L'ORTHOGONALITÉ *en une diapositive*

**Th. 2 : « si et seulement si »**




**Prouver un angle droit par un calcul :**
triangle $ABC$ rectangle en $A$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

**Déf. 3 :** non nuls et angle droit ;
le vecteur nul est orthogonal
à tout vecteur

## III. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE *en une diapositive*

*On calcule avec le produit scalaire « comme avec les nombres ». . .*

| | **Avec les nombres** | **Avec les vecteurs** |
|---|---|---|
| Th. 3 | $ba = ab$ | $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$ |
| Th. 4 | $(ka) \times b = k \times (ab)$ | $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ |
| Th. 5 | $a(b+c) = ab + ac$ | $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ |
| Th. 6 | $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ | $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$ |
| Th. 7 | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$ (idem avec $+$) |
| Th. 8 | $\lvert a-b\rvert^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $\lVert\vec{u} - \vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \lVert\vec{v}\rVert^2$ (idem avec $+$) |
| **. . . sauf** | $ab = 0$ : $a = 0$ ou $b = 0$ | $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **orthogonaux**, pas forcément nuls |

# Vérification

## Partie 2 — les exemples du cours

### → Vérification de la partie 2

*Les cinq exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.*

### Les ateliers en ligne

Atelier G — Coriolis et le cheval de halage

Atelier H — Cap sur l'EAM