ATELIER C

Deux démonstrations en miroir

Objectifs : Reconstituer les démonstrations des deux formules de somme, au programme.
Matériel : 12 étiquettes **Durée :** 20 minutes — sans calculatrice

Règle du jeu

Les 12 étiquettes sont les morceaux de **deux démonstrations** mélangées, plus **deux intruses** qui contiennent une erreur. Le code (E1, E2…) sert uniquement de repère : il n'indique pas la place de l'étiquette. Travaillez sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont sur la page suivante.

Les deux résultats à démontrer

Démonstration 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration 2. Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Travail à réaliser

1. Triez les étiquettes : celles de la démonstration 1, celles de la démonstration 2, et les deux intruses.

2. Remettez chaque démonstration dans l'ordre et recopiez-la sur votre cahier.

3. Pour chaque intruse, expliquez l'erreur qu'elle contient.

4. Les deux démonstrations sont « en miroir » : associez chaque étiquette de la démonstration 1 à celle de la démonstration 2 qui joue le même rôle, et décrivez ce rôle en quelques mots.

5. Calculez $1 + 2 + \cdots + 20$, puis $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$.

★ AIDES ★

1. Une étiquette où figure q appartient à la démonstration 2. Chaque démonstration compte cinq étiquettes.

2. Chaque démonstration commence par nommer la somme et se termine par la formule. Deux maillons : e quatre, puis e onze ; e sept, puis e dix. En dernier recours, comparez avec les démonstrations du théorème 5 du cours.

3. Combien y a-t-il de nombres de 1 à n ? Quel est le dernier terme de $q \times S_n$?

4. Cinq rôles, dans l'ordre : nommer la somme ; l'écrire d'une seconde façon ; combiner les deux égalités ; obtenir une égalité simple ; isoler la somme. Dans la démonstration 1, on additionne ; dans la démonstration 2, on soustrait.

5. *Voir le théorème 5*, avec $n = 20$, puis $q = 2$ et $n = 9$. *Contrôle :* $2^{10} = 1\,024$.