E1

On soustrait la seconde égalité de la première : presque tous les termes s'éliminent.

$$\begin{array}{rl} S_n = 1 + q + \cdots + q^n & \\ q \times S_n = \quad q + \cdots + q^n + q^{n+1} & \\ \hline S_n - q \times S_n = 1 & - q^{n+1} \end{array}$$

E2

Il y a n colonnes, toutes égales à $n+1$.

Donc $2S = n(n+1)$.

E3

Il y a $n+1$ colonnes, toutes égales à $n+1$.

Donc $2S = (n+1)^2$.

E4

Soit n un entier, $n \geqslant 1$.

On note

$S = 1 + 2 + \cdots + n$.

E5

Comme $q \neq 1$, le réel $1 - q$ n'est pas nul : on divise par $1 - q$.

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

E6

On additionne les deux égalités, colonne par colonne :

$$\begin{array}{rl} S = & 1 \quad + \quad 2 \quad + \cdots + \quad n \\ S = & n \quad + (n-1) + \cdots + \quad 1 \\ \hline 2S = & (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{array}$$

E7

Soit q un réel, $q \neq 1$, et n un entier, $n \geqslant 1$. On note

$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

E8

On soustrait : tous les termes s'éliminent, sauf deux.

$S_n - q \times S_n = 1 - q^n$

E9

On divise par 2 :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

E10

On multiplie les deux membres par q :

$q \times S_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$

E11

On écrit la même somme dans l'ordre inverse :

$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$

E12

On factorise le membre de gauche par S_n :

$S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$