Suites arithmétiques et suites géométriques

Cours

« Un voyage de mille lieues commence par un premier pas. »

Lao-tseu, *Tao-tö-king*, chapitre 64

Une suite est **arithmétique** si l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre (les nombres pairs 0, 2, 4, $6\ldots$; le compte à rebours 100, 95, $90\ldots$). Elle est **géométrique** si l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre (en doublant : 1, 2, 4, $8\ldots$; en divisant par 10 : $1\,000$, 100, $10\ldots$). Elles sont étudiées **en parallèle** : arithmétiques à gauche, géométriques à droite.

I. Définition

Définition.

Suite arithmétique

Une suite u est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la **raison** de la suite u.

Suite géométrique

Une suite u est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la **raison** de la suite u.

Théorème 1.

Suite arithmétique

Une suite u est arithmétique **si et seulement si** la différence de deux termes consécutifs est constante : il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Suite géométrique

Soit u une suite dont aucun terme n'est nul. u est géométrique **si et seulement si** le quotient de deux termes consécutifs est constant : il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Démonstration. $u_{n+1} - u_n = r$ équivaut à $u_{n+1} = u_n + r$; comme $u_n \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ équivaut à $u_{n+1} = q \times u_n$.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique (ou géométrique), on montre que la différence $u_{n+1} - u_n$ (ou le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$) est un réel fixe, qui ne dépend pas de n : on reste dans le cas général, avec du calcul littéral.

Exemple 1. La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 3$ est-elle arithmétique ?

Solution. Les premiers termes ($u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$) laissent penser que oui. Prouvons-le. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) - 3 - (2n - 3) \\ &= 2n + 2 - 3 - 2n + 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc la suite u est arithmétique de raison 2.

Exemple 2. Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 2^n$ est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

La suite u est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$.

Pour montrer qu'une suite **n'est pas** arithmétique (ou pas géométrique), un **contre-exemple** numérique suffit : trois termes consécutifs dont les deux différences (ou les deux quotients) ne sont pas égales.

Exemple 3. La suite u est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

Solution. $u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$ et $u_2 = 2u_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$.

- $u_1 - u_0 = 5 - 4 = 1$ et $u_2 - u_1 = 7 - 5 = 2$. Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite u n'est pas arithmétique.
- $\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{5} = 1{,}4$. Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite u n'est pas géométrique.

Théorème 2.

Suite arithmétique

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr \qquad \text{et} \qquad u_n = u_1 + (n-1)r$$

Suite géométrique

Si u est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

et, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Démonstration.

Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + nr$. Deux suites qui ont le même terme initial et la même relation de récurrence sont égales. Or $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = v_n + r$. Donc $u = v$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Enfin, $u_0 = u_1 - r$ donne $u_n = u_1 - r + nr = u_1 + (n-1)r$.

Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_0 \times q^n$. On a $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$. Les suites u et v ont le même terme initial et la même relation de récurrence : elles sont égales, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. La seconde égalité se démontre de la même façon.

Théorème 3.

Suite arithmétique

Soient a et b deux réels. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + bn$, alors la suite u est arithmétique, de raison b et de premier terme $u_0 = a$.

Suite géométrique

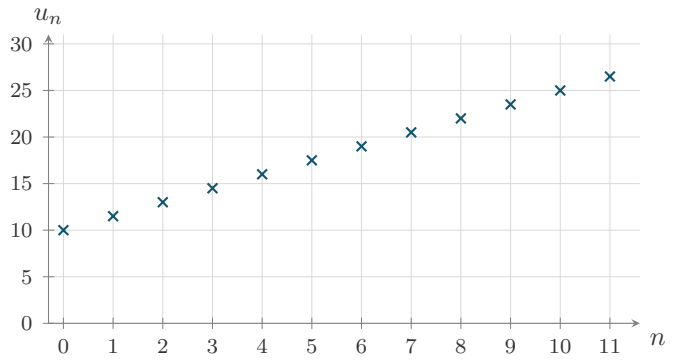
Soient a et b deux réels. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a \times b^n$, alors la suite u est géométrique, de raison b et de premier terme $u_0 = a$.

Démonstration.

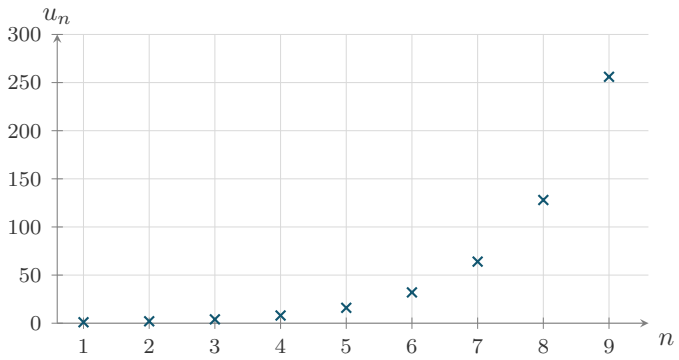
$u_{n+1} - u_n = a + b(n+1) - (a + bn) = b$: la différence est constante.

$u_{n+1} = a \times b^{n+1} = a \times b^n \times b = b \times u_n$.

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont **alignés** : $u_n = f(n)$, où f est la fonction affine $x \mapsto a + bx$. Ci-dessous, $r = 1{,}5$ et $u_0 = 10$.



Représentation graphique de la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$: les points ne sont pas alignés ; les termes grandissent de plus en plus vite.



Exemple 4. La suite u est définie par $u_0 = -230$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$: la suite u est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -230$. D'après le théorème 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = -230 + 5n$$

Exemple 5. La suite u est définie par $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{10}.

Solution. La suite u est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 3$. D'après le théorème 2, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$. Donc :

$$u_{10} = 3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1\,536$$

III. Sens de variation

Théorème 4.

Suite arithmétique

Soit u une suite arithmétique de raison r.
- si $r > 0$, u est strictement croissante ;
- si $r < 0$, u est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, u est constante.

Suite géométrique

Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.
- si $q > 1$, u est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, u est constante ;
- si $q < 0$, u n'est pas monotone : ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$: on lit le signe de r.

Si $q > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1)$, qui est du signe de $q - 1$ car $u_0 q^n > 0$.

Exemple 6. Déterminer le sens de variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 7 - 3n$.

Solution. $u_n = 7 + (-3)n$ est de la forme $a + bn$: d'après le théorème 3, la suite u est arithmétique de raison -3. Comme $-3 < 0$, la suite u est strictement décroissante d'après le théorème 4.

Exemple 7. La suite u est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \times u_n$. Déterminer son sens de variation.

Solution. La suite u est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4 > 0$. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, la suite u est strictement décroissante d'après le théorème 4.

IV. Modéliser une évolution

Les suites modélisent des phénomènes **discrets** : des valeurs relevées à intervalles réguliers (chaque année, chaque mois . . .), entre lesquelles il n'y a rien à étudier.

Propriété.

Accroissement constant

Une quantité qui augmente (ou diminue) chaque fois **du même nombre** r se modélise par une suite arithmétique de raison r (avec $r < 0$ pour une diminution).

Taux d'évolution constant

Une quantité qui augmente (ou diminue) chaque fois **du même pourcentage** $t\,\%$ se modélise par une suite géométrique de raison

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

(avec $t < 0$ pour une baisse).

Exemple 8. Une voiture achetée $10\,000$ € perd $10\,\%$ de sa valeur chaque année. On note u_n sa valeur, en euros, n années après l'achat ; ainsi $u_0 = 10\,000$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite u.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Écrire le calcul qui donne la valeur de la voiture au bout de 5 ans, puis l'effectuer sachant que $0{,}9^5 = 0{,}59049$.

Solution. 1. Perdre $10\,\%$ revient à multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 0{,}9$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9 \times u_n$. La suite u est géométrique de raison $0{,}9$. **2.** D'après le théorème 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10\,000 \times 0{,}9^n$. **3.** $u_5 = 10\,000 \times 0{,}9^5 = 10\,000 \times 0{,}59049 = 5\,904{,}9$: au bout de 5 ans, la voiture vaut $5\,904{,}90$ €.

V. Somme de termes consécutifs

Théorème 5.

Suite arithmétique

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suite géométrique

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration.

On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et on écrit la somme à l'endroit, puis à l'envers.

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 1 & + & 2 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Il y a n colonnes égales à $n+1$, donc $2S = n(n+1)$ et $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

On note $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

$$\begin{array}{rcl} S_n = & 1 + q + q^2 + \cdots + q^n & \\ q \times S_n = & q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} & \\ \hline S_n - q \times S_n = & 1 & - q^{n+1} \end{array}$$

Donc $S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$ et, comme $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Théorème 6.

Suite arithmétique

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Suite géométrique

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration.

Selon la même idée que la précédente.

Avec $n+1$ termes, de u_0 à u_n :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= u_0 \left(1 + q + \cdots + q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

De u_0 à u_{100}, il y a 101 termes ; de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.

Exemple 9. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 50 + 2n$. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.

Solution. D'après le théorème 3, la suite u est arithmétique. Il y a 101 termes et $u_{100} = 50 + 2 \times 100 = 250$. D'après le théorème 6 :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{100} &= \frac{(u_0 + u_{100}) \times 101}{2} \\ &= \frac{(50 + 250) \times 101}{2} \\ &= 150 \times 101 = 15\,150 \end{aligned}$$

Exemple 10. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.

Solution. Il y a 5 termes. D'après le théorème 6 :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_4 &= 1 \times \frac{1 - 3^5}{1 - 3} \\ &= \frac{1 - 243}{-2} \\ &= \frac{-242}{-2} = 121 \end{aligned}$$

Vérification : $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$.