SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. DÉFINITION
II. TERME GÉNÉRAL
III. SENS DE VARIATION
IV. MODÉLISER UNE ÉVOLUTION
V. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« Un voyage de mille lieues commence par un premier pas. »

— Lao-tseu, *Tao-tö-king*, chapitre 64

SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. DÉFINITION

Suite arithmétique

On passe d'un terme au suivant en **additionnant** toujours le même nombre.

Définition

Une suite u est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la **raison** de la suite u.

SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. DÉFINITION

Suite arithmétique

On passe d'un terme au suivant en **additionnant** toujours le même nombre.

Suite géométrique

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre.

Définition

Une suite u est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est la **raison** de la suite u.

Une suite u est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la **raison** de la suite u.

La différence entre deux termes consécutifs est constante.

Théorème 1

Une suite u est arithmétique **si et seulement si** il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = r$$

La différence entre deux termes consécutifs est constante.

Le quotient de deux termes consécutifs est constant.

Théorème 1

Une suite u est arithmétique **si et seulement si** il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Soit u une suite dont aucun terme n'est nul. u est géométrique **si et seulement si** il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Exemple 1

La suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 2n - 3$$

est-elle arithmétique ?

Exemple 2

Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 3 \times 2^n$$

est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

Pour montrer qu'une suite **n'est pas** arithmétique (ou pas géométrique), un **contre-exemple** numérique suffit.

Exemple 3

La suite u est définie par

$$u_0 = 4 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$$

Est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

II. TERME GÉNÉRAL

Théorème 2

Suite arithmétique

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n-1)r$

II. TERME GÉNÉRAL

Théorème 2

Suite arithmétique

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n-1)r$

Suite géométrique

Si u est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

et, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Démonstration du théorème 2

On pose $v_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$;
- $v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = v_n + r$.

Même terme initial, même relation de récurrence : $u = v$, donc $u_n = u_0 + nr$.

Enfin $u_0 = u_1 - r$ donne $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Démonstration du théorème 2

On pose $v_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$;
- $v_{n+1} = u_0 + (n+1)r = u_0 + nr + r = v_n + r$.

Même terme initial, même relation de récurrence : $u = v$, donc $u_n = u_0 + nr$.

Enfin $u_0 = u_1 - r$ donne $u_n = u_1 + (n-1)r$.

On pose $v_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0$;
- $v_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$.

Même terme initial, même relation de récurrence : $u = v$, donc $u_n = u_0 \times q^n$.

La seconde égalité se démontre de la même façon.

Théorème 3

Soient a et b deux réels. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a + bn$$

alors la suite u est **arithmétique**, de raison b et de premier terme $u_0 = a$.

Théorème 3

Soient a et b deux réels. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a + bn$$

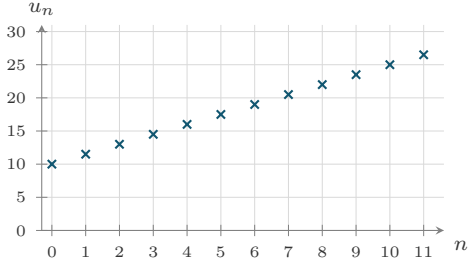
alors la suite u est **arithmétique**, de raison b et de premier terme $u_0 = a$.

Soient a et b deux réels. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a \times b^n$$

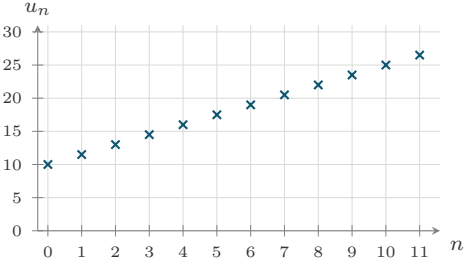
alors la suite u est **géométrique**, de raison b et de premier terme $u_0 = a$.

Suite arithmétique de raison $r = 1{,}5$ et de premier terme $u_0 = 10$: **les points sont alignés**.



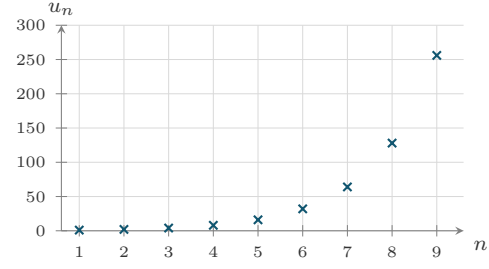
$u_n = 10 + 1{,}5n = f(n)$, avec f affine.

Suite arithmétique de raison $r = 1{,}5$ et de premier terme $u_0 = 10$: **les points sont alignés**.



$u_n = 10 + 1{,}5n = f(n)$, avec f affine.

Suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$: **les points ne sont pas alignés**.



Les termes grandissent de plus en plus vite.

Exemple 4

La suite u est définie par $u_0 = -230$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 5$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exemple 5

La suite u est définie par $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = 2 \times u_n$$

Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{10}.

III. SENS DE VARIATION

Théorème 4

Suite arithmétique de raison r

- si $r > 0$, u est strictement croissante ;
- si $r < 0$, u est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, u est constante.

III. SENS DE VARIATION

Théorème 4

Suite arithmétique de raison r

- si $r > 0$, u est strictement croissante ;
- si $r < 0$, u est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, u est constante.

Suite géométrique de raison q, avec $u_0 > 0$

- si $q > 1$, u est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, u est constante ;
- si $q < 0$, u **n'est pas monotone** : ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

Exemple 6

Déterminer le sens de variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 7 - 3n$$

Exemple 7

La suite u est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \times u_n$$

Déterminer son sens de variation.

IV. MODÉLISER UNE ÉVOLUTION

Les suites modélisent des phénomènes **discrets** : des valeurs relevées à intervalles réguliers (chaque année, chaque mois . . .), entre lesquelles il n'y a rien à étudier.

Propriété

Accroissement constant

Une quantité qui augmente (ou diminue) chaque fois **du même nombre** r se modélise par une suite **arithmétique** de raison r (avec $r < 0$ pour une diminution).

IV. MODÉLISER UNE ÉVOLUTION

Les suites modélisent des phénomènes **discrets** : des valeurs relevées à intervalles réguliers (chaque année, chaque mois…), entre lesquelles il n'y a rien à étudier.

Propriété

Accroissement constant

Une quantité qui augmente (ou diminue) chaque fois **du même nombre** r se modélise par une suite **arithmétique** de raison r (avec $r < 0$ pour une diminution).

Taux d'évolution constant

Une quantité qui augmente (ou diminue) chaque fois **du même pourcentage** $t\,\%$ se modélise par une suite **géométrique** de raison

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

(avec $t < 0$ pour une baisse).

Exemple 8

Une voiture achetée $10\,000$ € perd $10\,\%$ de sa valeur chaque année. On note u_n sa valeur, en euros, n années après l'achat ; ainsi $u_0 = 10\,000$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite u.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Écrire le calcul qui donne la valeur de la voiture au bout de 5 ans, puis l'effectuer sachant que $0{,}9^5 = 0{,}59049$.

V. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Théorème 5

Suite arithmétique

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

V. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Théorème 5

Suite arithmétique

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suite géométrique

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration du théorème 5

On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$, écrite à l'endroit puis à l'envers :

$$\begin{array}{rcccccc} S = & 1 & + & 2 & + \cdots + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + \cdots + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) \end{array}$$

n colonnes égales à $n+1$: $2S = n(n+1)$, donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration du théorème 5

On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$, écrite à l'endroit puis à l'envers :

$$\begin{array}{rcccccc} S = & 1 & + & 2 & + \cdots + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + \cdots + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) \end{array}$$

n colonnes égales à $n+1$: $2S = n(n+1)$, donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

On note $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$:

$$\begin{array}{rcccc} S_n = & 1 & + q + \cdots + & q^n & \\ q \times S_n = & & q + \cdots + q^n & + & q^{n+1} \\ \hline S_n - q \times S_n = & 1 & & - & q^{n+1} \end{array}$$

$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$ et, comme $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Théorème 6

La somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** est égale à :

$$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

De u_0 à u_{100}, il y a 101 **termes** ; de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.

Théorème 6

La somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** est égale à :

$$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

La somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$ est égale à :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

De u_0 à u_{100}, il y a 101 **termes** ; de u_p à u_n, il y en a $n - p + 1$.

Exemple 9

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 50 + 2n$$

Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.

Exemple 10

Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.

Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.

Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ Vérification de la partie 1

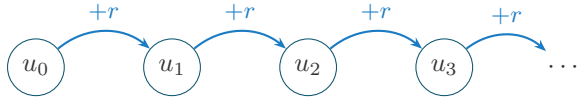
La définition et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

Partie 2

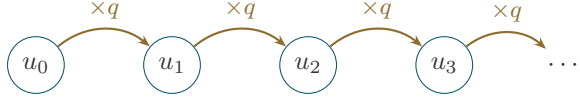
Revoir le cours

Une diapositive par partie, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. DÉFINITION *en une diapositive*



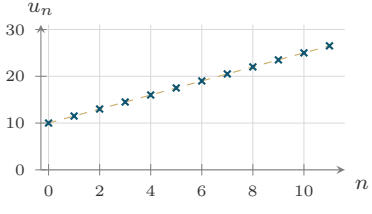
arithmétique : on **ajoute** r
$u_{n+1} - u_n = r$ (Th. 1)



géométrique : on **multiplie** par q
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ (termes non nuls)

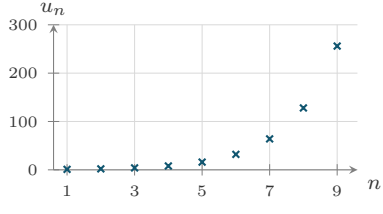
Ni l'un ni l'autre ? Un contre-exemple suffit (Ex. 3) :
$4, 5, 7$: $5 - 4 \neq 7 - 5$ et $\frac{5}{4} \neq \frac{7}{5}$.

Th. 2 $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$
Th. 3 $u_n = a + bn \Rightarrow$ arithmétique, raison b



points **alignés**

Th. 2 $u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1}$
Th. 3 $u_n = a \times b^n \Rightarrow$ géométrique, raison b



points **non alignés**, de plus en plus espacés

III. SENS DE VARIATION *en une diapositive*

Arithmétique, raison r		Géométrique, raison q, $u_0 > 0$	
$r > 0$	strictement croissante ↗	$q > 1$	strictement croissante ↗
$r < 0$	strictement décroissante ↘	$0 < q < 1$	strictement décroissante ↘
$r = 0$	constante →	$q = 1$	constante →
		$q < 0$	**pas monotone** (signes alternés)

On lit le signe de $u_{n+1} - u_n = r$.

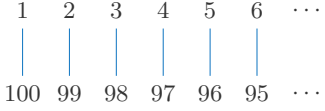
$1\ ;\ -2\ ;\ 4\ ;\ -8\ldots$ ($u_0 = 1$, $q = -2$) : ni croissante, ni décroissante.

IV. MODÉLISER UNE ÉVOLUTION *en une diapositive*

« augmente de 20 € chaque année »	→ arithmétique, $r = 20$
« baisse de 15 € chaque mois »	→ arithmétique, $r = -15$
« augmente de 3 % chaque année »	→ géométrique, $q = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$
« baisse de 10 % chaque année »	→ géométrique, $q = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$

Accroissement constant $\longrightarrow$ on **ajoute** r Taux constant de $t\,\%$ $\longrightarrow$ on **multiplie** par $1 + \dfrac{t}{100}$

V. SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS *en une diapositive*



chaque colonne vaut 101

$$1+2+\cdots+100=\frac{100\times 101}{2}=5\,050$$

Th. 6

$$\frac{(\text{premier}+\text{dernier})\times \text{nombre de termes}}{2}$$

$$\begin{array}{rl} S_n &= 1+q+\cdots+q^n \\ q\times S_n &= \quad q+\cdots+q^n+q^{n+1} \\ \hline S_n-q\times S_n &= 1-q^{n+1} \end{array}$$

on soustrait : **presque tout s'annule**

Th. 6

$$\text{premier terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les dix exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier G — Le temple de Bénarès

Atelier H — Cap sur l'EAM