Probabilités : succession d'épreuves indépendantes

« Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. »

Henri Poincaré, *Le hasard*, 1907

On enchaîne ici plusieurs expériences aléatoires, appelées **épreuves**, et l'on cherche la probabilité d'un résultat d'ensemble. Tout repose sur une idée simple : lorsque la première épreuve n'influence pas la seconde, les probabilités **se multiplient** le long des chemins de l'arbre.

I. Succession de deux épreuves indépendantes

Vocabulaire

Soient E et F deux ensembles.

- Un **couple** $(x\,;y)$ est formé d'un élément x de E et d'un élément y de F, **dans cet ordre** : en général, $(x\,;y) \neq (y\,;x)$.
- Le **produit cartésien** de E par F, noté $E \times F$ (lu « E croix F »), est l'ensemble de tous les couples $(x\,;y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.
- Lorsqu'un ensemble A est fini, son **cardinal**, noté $\text{Card}(A)$, est le nombre de ses éléments. L'ensemble vide n'a aucun élément : $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Rappel de seconde. Lorsque toutes les issues d'un univers fini Ω ont la même probabilité (**équiprobabilité**), la probabilité d'un évènement A est $p(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemple 1. On lance une pièce équilibrée, puis un dé équilibré à six faces.

1. Déterminer l'univers Ω de l'expérience et son cardinal.

2. Calculer la probabilité de l'évènement A : « obtenir Pile et un nombre pair ».

3. Calculer la probabilité de l'évènement B : « obtenir Face et un 7 ».

Solution.

1. Une issue est un couple (résultat de la pièce ; résultat du dé) : $\Omega = \{P\,;F\} \times \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$. Le tableau à double entrée donne toutes les issues :

	1	2	3	4	5	6
P	$(P\,;1)$	$(\mathbf{P}\,;\mathbf{2})$	$(P\,;3)$	$(\mathbf{P}\,;\mathbf{4})$	$(P\,;5)$	$(\mathbf{P}\,;\mathbf{6})$
F	$(F\,;1)$	$(F\,;2)$	$(F\,;3)$	$(F\,;4)$	$(F\,;5)$	$(F\,;6)$

Le tableau a 2 lignes et 6 colonnes, donc $\text{Card}(\Omega) = 2 \times 6 = 12$.

2. Les 12 issues sont équiprobables et $A = \{(P\,;2)\,;(P\,;4)\,;(P\,;6)\}$, en gras dans le tableau. Donc $p(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

3. Aucune issue ne réalise B : $B = \varnothing$, donc $p(B) = \dfrac{0}{12} = 0$.

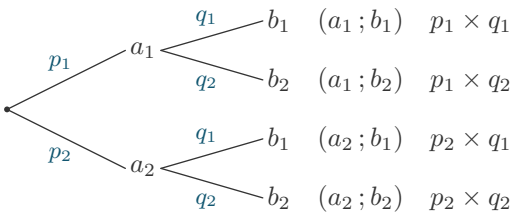
Définition 1. On réalise successivement deux épreuves, d'univers Ω_1 puis Ω_2. Ces deux épreuves sont **indépendantes** lorsque le résultat de la première n'a aucune influence sur les probabilités des issues de la seconde.

L'univers de l'expérience est alors $\Omega_1 \times \Omega_2$: ses issues sont des couples.

Théorème 1.

Lorsque deux épreuves sont indépendantes :

- dans l'arbre, les pondérations du second niveau sont **les mêmes sur chaque branche** du premier niveau ;
- la probabilité d'un couple est le **produit** des pondérations des deux branches de son chemin.



On peut aussi représenter l'expérience par un **tableau à double entrée** : chaque case contient la probabilité d'un couple, produit de la probabilité écrite en tête de sa ligne par celle écrite en tête de sa colonne.

Exemple 2. Une urne contient 3 boules rouges (R) et 2 boules vertes (V), indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, on note sa couleur et on la **remet** dans l'urne, puis on tire une seconde boule.

1. Justifier que les deux tirages sont des épreuves indépendantes.

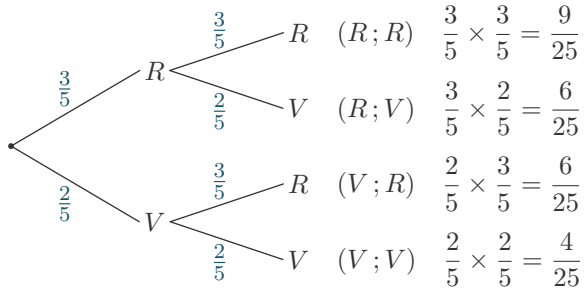
2. Représenter l'expérience par un arbre, puis par un tableau.

3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges, puis celle d'obtenir deux boules de la même couleur.

Solution.

1. La boule est remise : au second tirage, l'urne contient de nouveau 3 boules rouges et 2 vertes, quel que soit le premier résultat. Le premier tirage n'influence pas le second.

2. Les pondérations se répètent au second niveau (théorème 1) :



	$R\ \left(\frac{3}{5}\right)$	$V\ \left(\frac{2}{5}\right)$
$R\ \left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
$V\ \left(\frac{2}{5}\right)$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

3. $p\big((R\,;R)\big)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$. Deux boules de la même couleur : ce sont les issues $(R\,;R)$ et $(V\,;V)$, donc la probabilité cherchée vaut $\dfrac{9}{25}+\dfrac{4}{25}=\dfrac{13}{25}$.

Remarque. Sans remise, la composition de l'urne change après le premier tirage : après une boule rouge, il ne reste que 2 rouges sur 4 boules. Les deux tirages ne sont plus indépendants et l'on utilise un arbre pondéré par des probabilités conditionnelles.

II. Répétition d'épreuves de Bernoulli

Définition 2. Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire qui n'a que deux issues :

- le **succès**, noté S, de probabilité p ;
- l'**échec**, noté $\overline{S}$, de probabilité $1-p$.

Par exemple, lancer un dé équilibré en appelant succès « obtenir 6 » : $p=\dfrac{1}{6}$ et $1-p=\dfrac{5}{6}$.

Définition 3. Répéter n fois la même épreuve de Bernoulli, les répétitions étant indépendantes, c'est réaliser n **épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**. Dans ce chapitre, $n\leqslant 4$.

Une issue s'écrit comme une suite de n lettres : par exemple $S\,\overline{S}\,S$ lorsque $n=3$ (succès, puis échec, puis succès).

Théorème 2. Pour n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p :

- l'arbre a n niveaux ; de chaque nœud partent deux branches, S pondérée par p et $\overline{S}$ pondérée par $1-p$;
- la probabilité d'une issue est le produit des pondérations de son chemin ; elle ne dépend que du nombre de succès : un chemin qui compte k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$;
- pour calculer la probabilité d'un évènement, on repère sur l'arbre les chemins qui le réalisent et on additionne leurs probabilités.

Théorème 3. Pour n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p :

- un seul chemin ne compte aucun succès, donc $p(\text{« aucun succès »}) = (1-p)^n$;
- « au moins un succès » est l'évènement contraire de « aucun succès », donc

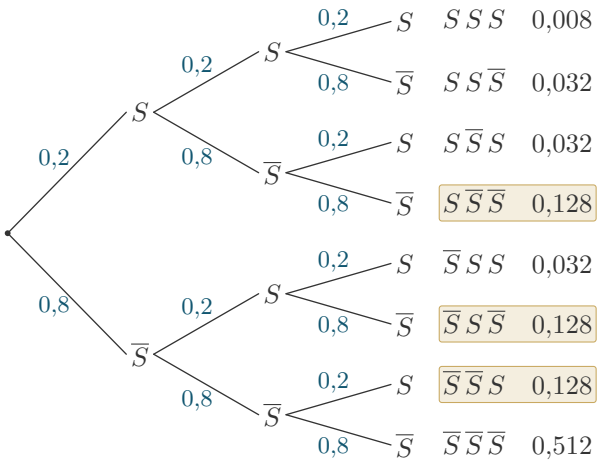
$$p(\text{« au moins un succès »}) = 1-(1-p)^n.$$

Exemple 3. Un joueur de fléchettes atteint le centre de la cible avec une probabilité de $0{,}2$. Il lance trois fléchettes ; les lancers sont indépendants. On appelle succès « atteindre le centre ».

1. Représenter la situation par un arbre.

2. Calculer la probabilité qu'il n'atteigne jamais le centre, puis celle qu'il l'atteigne au moins une fois.

3. Calculer la probabilité qu'il atteigne le centre exactement une fois.



Solution.

1. Il s'agit de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec $p = 0{,}2$ et $1-p = 0{,}8$: c'est l'arbre ci-dessus.

2. « Aucun succès » : un seul chemin, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$. Sa probabilité est $0{,}8^3 = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}512$. D'après le théorème 3, $p(\text{« au moins un succès »}) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

3. Sur l'arbre, trois chemins comptent exactement un succès (surlignés) : $S\,\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}\,S\,\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}\,S$. Chacun a pour probabilité $0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}128$. La probabilité cherchée vaut donc $3 \times 0{,}128 = 0{,}384$.

Exemple 4. On lance quatre fois une pièce équilibrée. On appelle succès « obtenir Pile » : $p = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois Pile.

2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile.

Solution.

1. Il s'agit de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Chaque chemin a pour probabilité
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} :$$
les 16 issues sont équiprobables.
On compte sur l'arbre les chemins qui comportent exactement deux S : il y en a 6 (surlignés et numérotés). La probabilité cherchée vaut donc
$$6 \times \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$
On peut aussi l'écrire $\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, avec $\text{Card}(A) = 6$ et $\text{Card}(\Omega) = 16$.

2. D'après le théorème 3 :
$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

