PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1. ARBRES PONDÉRÉS
2. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES ET INDÉPENDANCE
3. SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Partie 1

Découvrir le cours

Définitions, théorèmes et exemples, présentés et expliqués.

« Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. »

Henri Poincaré, *Le hasard*, 1907

SUCCESSION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

I. SUCCESSION DE DEUX ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Vocabulaire

Soient E et F deux ensembles.

- Un **couple** $(x\,;y)$ est formé d'un élément x de E et d'un élément y de F, **dans cet ordre**.
- Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble de tous les couples $(x\,;y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.
- Le **cardinal** $\mathrm{Card}(A)$ d'un ensemble fini A est son nombre d'éléments ; $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Rappel de seconde. En situation d'**équiprobabilité** sur un univers fini Ω : $p(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemple 1

On lance une pièce équilibrée, puis un dé équilibré à six faces.

1. Déterminer l'univers Ω de l'expérience et son cardinal.
2. Calculer la probabilité de l'évènement A : « obtenir Pile et un nombre pair ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement B : « obtenir Face et un 7 ».

	1	2	3	4	5	6
P	$(P\,;1)$	$(P\,;2)$	$(P\,;3)$	$(P\,;4)$	$(P\,;5)$	$(P\,;6)$
F	$(F\,;1)$	$\ldots$				

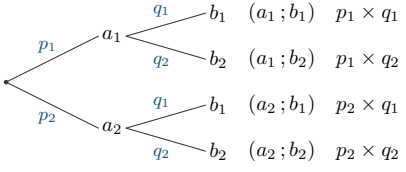
Définition 1

Deux épreuves réalisées successivement, d'univers Ω_1 puis Ω_2, sont **indépendantes** lorsque le résultat de la première n'a aucune influence sur les probabilités des issues de la seconde. L'univers de l'expérience est alors $\Omega_1 \times \Omega_2$: ses issues sont des couples.

Théorème 1

Lorsque deux épreuves sont indépendantes :

- les pondérations du second niveau sont **les mêmes sur chaque branche** ;
- la probabilité d'un couple est le **produit** des pondérations de son chemin.

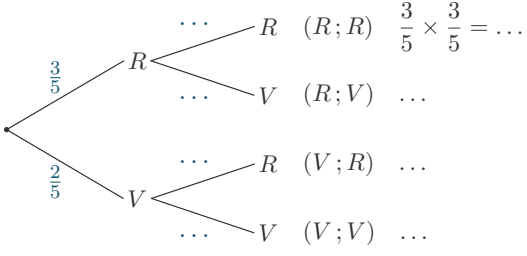


On peut aussi utiliser un **tableau à double entrée** : chaque case contient le produit des probabilités écrites en tête de sa ligne et de sa colonne.

Exemple 2

Une urne contient 3 boules rouges (R) et 2 boules vertes (V), indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, on note sa couleur et on la **remet** dans l'urne, puis on tire une seconde boule.

1. Justifier que les deux tirages sont des épreuves indépendantes.
2. Représenter l'expérience par un arbre, puis par un tableau.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges, puis celle d'obtenir deux boules de la même couleur.



	$R\left(\frac{3}{5}\right)$	$V\left(\frac{2}{5}\right)$
$R\left(\frac{3}{5}\right)$	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \ldots$	
$V\left(\frac{2}{5}\right)$		

II. RÉPÉTITION D'ÉPREUVES DE BERNOULLI

Définition 2

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire qui n'a que deux issues : le **succès**, noté S, de probabilité p, et l'**échec**, noté $\overline{S}$, de probabilité $1-p$.

Définition 3

Répéter n fois la même épreuve de Bernoulli, les répétitions étant indépendantes, c'est réaliser n **épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes** (ici $n \leqslant 4$). Une issue s'écrit comme une suite de n lettres, par exemple $S\,\overline{S}\,S$ pour $n=3$.

Théorème 2

Pour n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p :

- l'arbre a n niveaux ; à chaque nœud, S est pondéré par p et $\overline{S}$ par $1-p$;
- la probabilité d'une issue est le produit des pondérations de son chemin : un chemin à k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité $p^k \times (1-p)^{n-k}$;
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui le réalisent, repérés et comptés sur l'arbre.

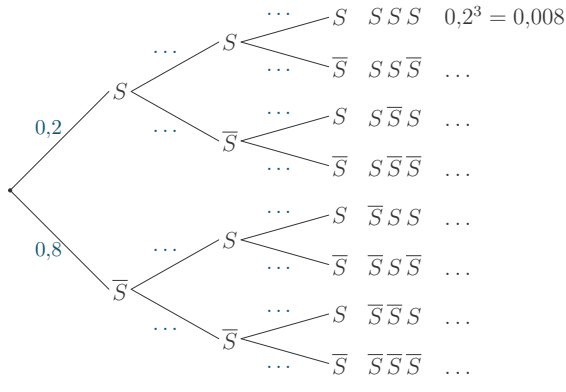
Théorème 3

$p(\text{« aucun succès »}) = (1-p)^n$ et $p(\text{« au moins un succès »}) = 1-(1-p)^n$.

Exemple 3

Un joueur de fléchettes atteint le centre de la cible avec une probabilité de $0{,}2$. Il lance trois fléchettes ; les lancers sont indépendants. On appelle succès « atteindre le centre ».

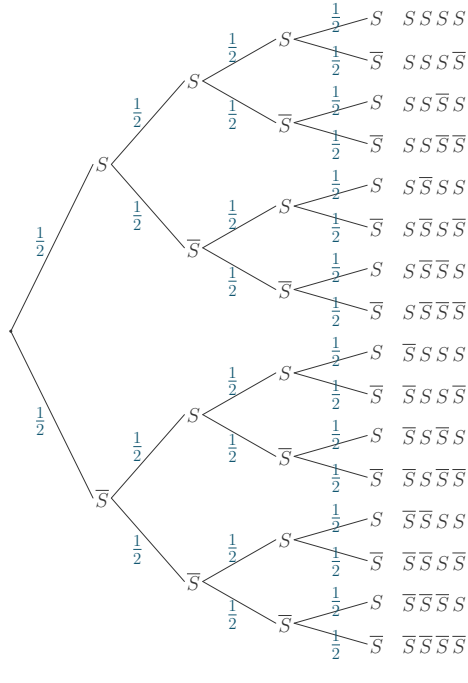
1. Représenter la situation par un arbre.
2. Calculer la probabilité qu'il n'atteigne jamais le centre, puis celle qu'il l'atteigne au moins une fois.
3. Calculer la probabilité qu'il atteigne le centre exactement une fois.



Exemple 4

On lance quatre fois une pièce équilibrée. On appelle succès « obtenir Pile » : $p = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois Pile.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile.



Vérification

Partie 1 — juste après le cours

→ Vérification de la partie 1

Les définitions et les théorèmes qui viennent d'être présentés.

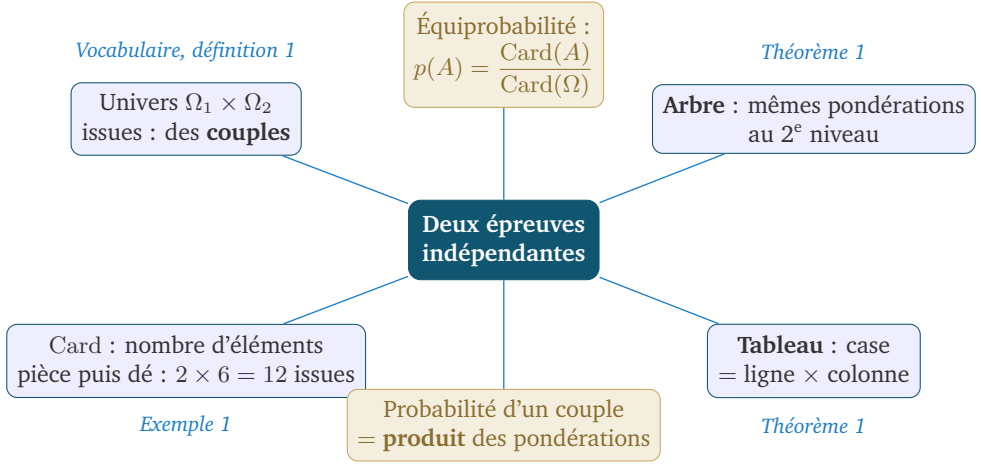
Partie 2

Revoir le cours

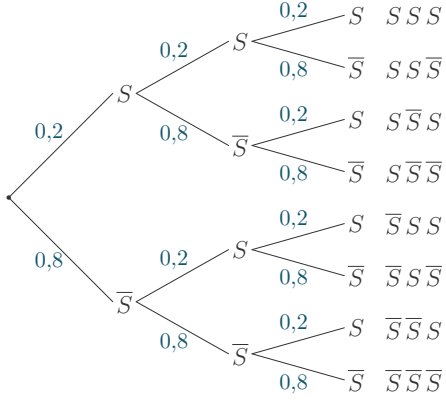
Une diapositive par section, pour balayer l'essentiel en quelques minutes.

I. DEUX ÉPREUVES INDÉPENDANTES

en une diapositive



II. RÉPÉTITION D'ÉPREUVES DE BERNOULLI *en une diapositive*



$n = 3$ épreuves, $p = 0{,}2$: $2^3 = 8$ chemins

Chemin : produit des pondérations,
k succès, $n - k$ échecs $\longrightarrow$ $p^k \times (1-p)^{n-k}$ *Th. 2*

Évènement : repérer et **compter** les chemins sur l'arbre, puis additionner. *Th. 2*

Aucun succès : $(1-p)^n$
Au moins un succès : $1 - (1-p)^n$ *Th. 3*

Vérification

Partie 2 — les exemples du cours

→ Vérification de la partie 2

Les quatre exemples du cours, repris avec d'autres valeurs et d'autres cas.

Les ateliers en ligne

Atelier E — Cartes menteuses

Atelier G — π à coups de fléchettes

Atelier I — QCM façon EAM