ATELIER H

La puce sur la droite graduée

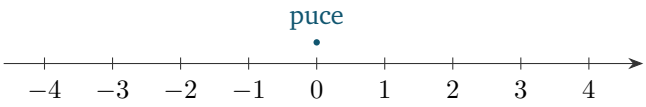
Objectifs : Étudier une marche aléatoire avec l'arbre d'une répétition d'épreuves.
Durée : 20 minutes — sans calculatrice

Consignes

Répondez sur votre cahier, puis allez chercher le corrigé. Les aides sont sur la page suivante.

Une marche aléatoire

Une puce est posée au point d'abscisse 0 d'une droite graduée. Toutes les secondes, elle saute d'une unité : vers la droite $(+1)$ ou vers la gauche (-1), avec la même probabilité $\frac{1}{2}$, et sans se soucier de ses sauts précédents. On observe sa position après 4 sauts.



1. Expliquer pourquoi les 4 sauts sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On appelle succès S : « sauter vers la droite ».

2. Représenter les 4 sauts par un arbre et écrire, au bout de chaque chemin, la position finale de la puce.

3. Quelles sont les positions possibles après 4 sauts ? Que remarque-t-on ?

4. Calculer la probabilité que la puce soit en 4, puis en 2.

5. Calculer la probabilité que la puce soit revenue en 0. Vérifier que les probabilités des positions possibles ont pour somme 1.

6. La puce peut-elle être en 0 après 3 sauts ? Après 5 sauts ? Justifier sans arbre.

★ AIDES ★

1. *Voir les définitions 2 et 3.* Deux issues par saut, même probabilité à chaque saut, et un saut n'influence pas le suivant.

2. *Voir l'exemple 4* : 16 chemins. La position finale est le nombre de $+1$ moins le nombre de -1. *Contrôle :* le chemin $S\,S\,\overline{S}\,\overline{S}$ mène en 0.

3. Les positions vont de -4 à 4, mais toutes les valeurs entières ne sont pas atteintes : lesquelles manquent ?

4. Tous les chemins ont la même probabilité, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ (exemple 4). Compter sur l'arbre les chemins qui mènent en 4, puis ceux qui mènent en 2 (trois S et un $\overline{S}$).

5. Revenir en 0, c'est avoir fait exactement deux sauts vers la droite et deux vers la gauche : combien de chemins ? *Contrôle :* $1+4+6+4+1=16$.

6. Après n sauts, la position est $k-(n-k)=2k-n$, où k est le nombre de sauts vers la droite. Pour quelles valeurs de n ce nombre peut-il être nul ?