CHAPITRE 111

Succession d'épreuves indépendantes — notes de présentation, partie 1

Séance 1 — 55 min environ, hors vérification. Document du professeur, jamais distribué. Les élèves suivent sur le cours complet, sans recopier.

Diapositive 1 — Titre de la séquence

1 min

Au tableau Situer le chapitre : après les arbres pondérés (102) et l'indépendance (106), on enchaîne désormais des épreuves qui ne s'influencent pas.

Diapositive 2 — Page de garde de la partie 1

2 min

Anecdote Poincaré écrit cette phrase dans son article « Le hasard » (1907), repris dans *Science et méthode* ; mais c'est pour aussitôt la discuter : le hasard apparaît aussi quand une cause très petite, qui nous échappe, produit un effet considérable. Autrement dit, même un monde entièrement déterminé laisse place au calcul des probabilités. *(H. Poincaré, « Le hasard », Revue du mois, 1907 ; Science et méthode, 1908, livre I, chap. 4)*

Diapositive 3 — I. Vocabulaire

6 min

Au tableau $E = \{P\,;F\}$ et $F = \{1\,;2\,;3\}$: $E \times F = \{(P\,;1)\,;(P\,;2)\,;(P\,;3)\,;(F\,;1)\,;(F\,;2)\,;(F\,;3)\}$, $\mathrm{Card}(E \times F) = 2 \times 3 = 6$. L'ordre compte : $(P\,;1)$ est dans $E \times F$, mais $(1\,;P)$ n'y est pas.

Anecdote « Cartésien » vient de *Cartesius*, le nom latin de Descartes : le plan muni d'un repère, c'est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de réels, c'est-à-dire $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Le mot « cardinal » pour le nombre d'éléments est dû à Georg Cantor. *(R. Descartes, La Géométrie, 1637 ; G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, 1895)*

Diapositive 4 — Rappel, exemple 1

6 min

Au tableau Le tableau est commencé sur la diapositive : compléter la ligne F (12 couples). $\Omega = \{P\,;F\} \times \{1\,;\ldots\,;6\}$, $\mathrm{Card}(\Omega) = 2 \times 6 = 12$. $A = \{(P\,;2)\,;(P\,;4)\,;(P\,;6)\}$, $p(A) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$. $B = \varnothing$, $p(B) = 0$.

Anecdote Des joueurs florentins demandèrent à Galilée pourquoi, avec trois dés, la somme 10 sort plus souvent que la somme 9, alors que chacune s'obtient de six façons. Réponse : en comptant les résultats *ordonnés*, on trouve 27 cas pour 10 contre 25 pour 9, sur 216. C'est exactement l'idée des couples : l'ordre compte. *(G. Galilée, Sopra le scoperte dei dadi, vers 1620, publié en 1718)*

Diapositive 5 — Définition 1, théorème 1

6 min

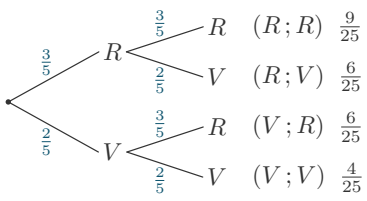
Au tableau Lien avec le chapitre 106 : si A ne porte que sur la 1re épreuve et B que sur la 2de, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Sur l'arbre, cela se voit : pondérations identiques au second niveau.

Anecdote **[attestation incertaine]** Le 18 août 1913, au casino de Monte-Carlo, le noir serait sorti 26 fois de suite à la roulette ; des joueurs auraient misé toujours plus sur le rouge, persuadés qu'il « devait » sortir. La roulette n'a pas de mémoire : les tirages sont indépendants. *(récit popularisé par D. Huff, How to Take a Chance, 1959 ; aucune source d'époque consultée)*

Diapositive 6 — Exemple 2

8 min

Au tableau Arbre et tableau sont commencés sur la diapositive. 1. Avec remise, l'urne est la même au second tirage : $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$ à chaque fois. 2. Ci-dessous ; contrôle : $\frac{9+6+6+4}{25} = 1$. 3. $p\big((R\,;R)\big) = \frac{9}{25}$; même couleur : $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$. Sans remise : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ pour deux rouges.



	$R\ (\frac{3}{5})$	$V\ (\frac{2}{5})$
$R\ (\frac{3}{5})$	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
$V\ (\frac{2}{5})$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

Diapositive 7 — II. Définitions 2 et 3 *5 min*

Au tableau Pièce, succès « Pile » : $p = \dfrac{1}{2}$. Dé, succès « obtenir 6 » : $p = \dfrac{1}{6}$. Pour $n = 3$, les 8 issues : SSS, $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $S\overline{S}\overline{S}$, $\overline{S}SS$, $\overline{S}S\overline{S}$, $\overline{S}\overline{S}S$, $\overline{S}\overline{S}\overline{S}$.

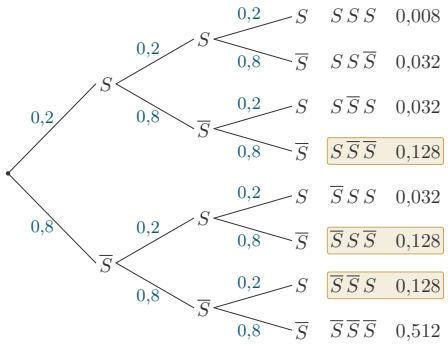
Anecdote Jacques Bernoulli, né à Bâle fin 1654 dans le calendrier alors en usage (le 6 janvier 1655 dans le nôtre), l'année même de la correspondance entre Pascal et Fermat, a travaillé une vingtaine d'années sur la répétition d'épreuves identiques. Son *Ars Conjectandi* n'est publié qu'en 1713, huit ans après sa mort, par son neveu Nicolas. *(J. Bernoulli,* Ars Conjectandi*, 1713, 4e partie)*

Diapositive 8 — Théorèmes 2 et 3 *6 min*

Au tableau $n = 3$, $p = 0{,}2$: le chemin $S\,\overline{S}\,S$ a pour probabilité $0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}032 = 0{,}2^2 \times 0{,}8$ (deux succès, un échec). Théorème 3 : « au moins un succès » et « aucun succès » sont contraires, d'où $1 - (1-p)^n$.

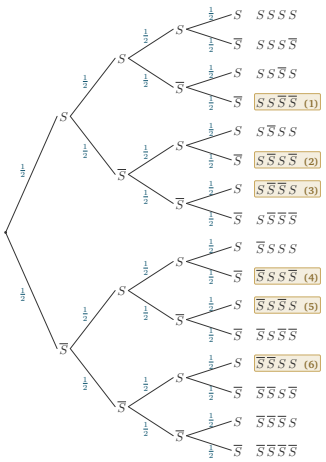
Diapositive 9 — Exemple 3 *7 min*

Au tableau 1. L'arbre est commencé sur la diapositive : compléter les pondérations et les probabilités des chemins (arbre ci-contre).
2. $0{,}8^3 = 0{,}64 \times 0{,}8 = 0{,}512$, puis $1 - 0{,}512 = 0{,}488$.
3. Trois chemins (surlignés), chacun $0{,}2 \times 0{,}8^2 = 0{,}128$, donc $3 \times 0{,}128 = 0{,}384$.
Contrôle : $0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1$.



Diapositive 10 — Exemple 4 *6 min*

Au tableau L'arbre complet est sur la diapositive : surligner les chemins à deux S.
Chaque chemin : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.
6 chemins à deux S, donc $\dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.
Au moins un Pile : $1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.



Anecdote Buffon lança une pièce $4\,040$ fois et obtint $2\,048$ fois Pile ; à la fin du XIXe siècle, Karl Pearson alla jusqu'à $24\,000$ lancers, pour $12\,012$ Pile. Les fréquences sont proches de $\dfrac{1}{2}$, sans l'atteindre exactement. *(G.-L. Leclerc de Buffon,* Essai d'arithmétique morale*, 1777 ; K. Pearson,* The Chances of Death*, 1897)*