Arithmétique : multiples, diviseurs, parité et identités remarquables

Cours

« Les mathématiques sont la reine des sciences, et l'arithmétique est la reine des mathématiques. »

Carl Friedrich Gauss, rapporté par Sartorius von Waltershausen (1856)

L'arithmétique étudie les nombres entiers : qui divise qui, ce qui est pair ou impair, comment écrire une fraction le plus simplement possible. On y apprend surtout à **démontrer** : une propriété vraie sur quelques exemples ne l'est pas forcément pour tous les entiers.

I. Entiers, multiples et diviseurs

Définition 1. Entiers naturels, entiers relatifs. Les **entiers naturels** sont les nombres 0, 1, 2, 3, $\dots$; on note $\mathbb{N}$ leur ensemble. Les **entiers relatifs** sont les entiers naturels et leurs opposés : $\dots$, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, $\dots$; on note $\mathbb{Z}$ leur ensemble. Tout entier naturel est un entier relatif. Dans ce chapitre, « un entier » veut dire « un entier relatif ».

Définition 2. Multiple, diviseur. Soient a et b deux entiers. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que

$$a = kb$$

On dit aussi que b est un **diviseur** de a, ou que b **divise** a.

Par exemple, $35 = 5 \times 7$: 35 est un multiple de 7 et 7 est un diviseur de 35 (ici $k = 5$). De même, $-12 = (-3) \times 4$: -12 est un multiple de 4.

Remarque.

- $0 = 0 \times b$: 0 est un multiple de tout entier b.
- $a = 1 \times a$: 1 et a sont des diviseurs de a.
- Les multiples de b sont $\dots$, $-2b$, $-b$, 0, b, $2b$, $3b$, $\dots$: il y en a une infinité. Un entier naturel a non nul n'a qu'un nombre fini de diviseurs dans $\mathbb{N}$, tous compris entre 1 et a.

Propriété 1. Division euclidienne. Soient a un entier naturel et b un entier naturel non nul. La division euclidienne de a par b donne un quotient q et un reste r, entiers naturels, tels que

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b$$

- a est un multiple de b **si et seulement si** le reste r est nul.
- Le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a est bq.

Remarque (critères de divisibilité, rappel). Un entier naturel est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ; par 5 s'il est 0 ou 5 ; par 10 s'il est 0. Il est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres l'est. Il est divisible par 3 (par 9) si la somme de ses chiffres l'est.

Remarque (en Python). `a // b` donne le quotient et `a % b` le reste de la division euclidienne de a par b. Le test `a % b == 0` vaut `True` exactement quand a est un multiple de b, et `b * (a // b)` est le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a.

Propriété 2. Somme de deux multiples. La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

Plus généralement, pour tout entier a, la somme et la différence de deux multiples de a sont des multiples de a.

Démonstration de la propriété 2. Soient m et n deux multiples de 7 : il existe deux entiers k et k' tels que $m = 7k$ et $n = 7k'$ (deux lettres différentes : m et n ne sont pas forcément égaux). Alors

$$m + n = 7k + 7k' = 7(k + k')$$

Comme $k + k'$ est un entier, $m + n$ est un multiple de 7.

La même démonstration vaut en remplaçant 7 par n'importe quel entier a ; et $m - n = 7(k - k')$ donne la différence.

Exemple 1. Donner la liste des diviseurs de 36 dans $\mathbb{N}$.

Solution. On cherche les produits égaux à 36, en essayant 1, 2, 3… jusqu'à ce que les deux facteurs se croisent : $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$ (5 ne divise pas 36). Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Exemple 2. 200 est-il un multiple de 7 ? Quel est le plus grand multiple de 7 inférieur ou égal à 200 ?

Solution. On pose la division euclidienne de 200 par 7 : $200 = 7 \times 28 + 4$, avec $0 \leqslant 4 < 7$. Le reste 4 n'est pas nul : 200 n'est pas un multiple de 7 (propriété 1). Le plus grand multiple de 7 inférieur ou égal à 200 est $7 \times 28 = 196$.

Exemple 3. Charlotte possède entre 400 et 450 livres. Elle peut les ranger par paquets de 3, par paquets de 5 ou par paquets de 7, sans qu'il en reste. Combien de livres possède-t-elle ?

Solution. Le nombre N de livres est un multiple de 3, de 5 et de 7, compris entre 400 et 450. Les multiples de 7 compris entre 400 et 450 sont 406, 413, 420, 427, 434, 441, 448. Parmi eux, un seul est un multiple de 5 (chiffre des unités 0 ou 5) : 420. Enfin $4 + 2 + 0 = 6$ est un multiple de 3, donc 420 aussi. Charlotte possède 420 livres.

Exemple 4. Démontrer que si un entier n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3. La réciproque est-elle vraie ?

Solution. Si n est un multiple de 6, il existe un entier k tel que $n = 6k = 3 \times (2k)$. Comme $2k$ est un entier, n est un multiple de 3.

La réciproque, « si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 6 », est fausse : $9 = 3 \times 3$ est un multiple de 3, mais pas de 6 ($9 = 6 \times 1 + 3$). C'est un **contre-exemple**.

II. Identités remarquables, factorisation

Propriété 3. Distributivité, facteur commun. Pour tous nombres k, a et b :

$$k(a + b) = ka + kb$$

Lue de gauche à droite, cette égalité **développe** ; lue de droite à gauche, elle **factorise** par le facteur commun k. Par exemple, $3x^2 + 5x = x(3x + 5)$ et $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$.

Propriété 4. Identités remarquables. Pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Elles se démontrent en développant, par exemple $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$.

Remarque (attention). $(a + b)^2$ n'est pas égal à $a^2 + b^2$: il manque le double produit $2ab$. Un **contre-exemple** suffit à le montrer : pour $a = b = 1$, $(1 + 1)^2 = 4$, alors que $1^2 + 1^2 = 2$.

Méthode : factoriser une expression

1. Chercher d'abord un **facteur commun** à tous les termes (un nombre, x, une parenthèse) et l'écrire devant une parenthèse.
2. Sinon, reconnaître une **identité** : une différence de deux carrés, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, ou trois termes $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ et $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, en vérifiant le double produit.
3. Contrôler en développant le résultat.

Exemple 5. Développer et réduire $A = (3x-2)^2$ et $B = (2x+5)(2x-5)$.

Solution.

Avec $(a-b)^2$, où $a = 3x$ et $b = 2$:

$$\begin{aligned} A &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 \\ &= 9x^2 - 12x + 4 \end{aligned}$$

Avec $(a+b)(a-b)$, où $a = 2x$ et $b = 5$:

$$\begin{aligned} B &= (2x)^2 - 5^2 \\ &= 4x^2 - 25 \end{aligned}$$

Exemple 6. Factoriser $C = 5x^2 - 15x$, $D = 9x^2 - 16$ et $E = x^2 + 10x + 25$.

Solution.

- C : le facteur commun est $5x$, donc $C = 5x \times x - 5x \times 3 = 5x(x-3)$.
- D : une différence de deux carrés, $D = (3x)^2 - 4^2 = (3x-4)(3x+4)$.
- E : trois termes, $E = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2$ (le double produit est bien $10x$), donc $E = (x+5)^2$.

III. Nombres pairs, nombres impairs

Définition 3. Nombre pair, nombre impair. Un entier n est **pair** lorsqu'il est un multiple de 2 : il existe un entier k tel que $n = 2k$. Il est **impair** lorsqu'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.

Tout entier est pair ou impair, et jamais les deux (on l'admet).

Remarque.

- Deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n+1$: l'un est pair, l'autre impair.
- Deux nombres pairs quelconques s'écrivent avec **deux lettres différentes**, $2k$ et $2m$: avec la même lettre, on écrirait deux fois le même nombre.
- $n+1$ n'est pas « un nombre impair » : il ne l'est que si n est pair.

Propriété 5. Carré d'un nombre impair. Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration de la propriété 5. Soit n un nombre impair : il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Avec l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 s'écrit $2K+1$ avec $K = 2k^2 + 2k$ entier : n^2 est impair.

Remarque (contraposée). La propriété 5 dit : « si n est impair, alors n^2 est impair ». Sa **contraposée**, « si n^2 est pair, alors n est pair », est vraie elle aussi : si n n'était pas pair, il serait impair, et n^2 serait impair.

Exemple 7. Démontrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Solution. Soient m et n deux nombres impairs : il existe deux entiers k et k' tels que $m = 2k+1$ et $n = 2k'+1$. Alors $m+n = 2k+2k'+2 = 2(k+k'+1)$. Comme $k+k'+1$ est un entier, $m+n$ est pair.

Exemple 8. **1.** Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3. **2.** La somme de deux entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 3 ?

Solution. 1. Trois entiers consécutifs s'écrivent n, $n+1$, $n+2$, où n est un entier. Leur somme est $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$: c'est un multiple de 3, car $n+1$ est un entier.

2. Non. $4+5=9$ est un multiple de 3, mais un exemple ne prouve rien ; un **contre-exemple** suffit à prouver que c'est faux : $2+3=5$ n'est pas un multiple de 3.

IV. Fractions irréductibles

Définition 4. Fraction irréductible. Soient a et b deux entiers, b non nul. La fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1.

Par exemple, $\frac{8}{15}$ est irréductible (les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4, 8, et seul 1 divise 15), mais $\frac{6}{15}$ ne l'est pas : 3 divise 6 et 15.

Propriété 6. Simplifier une fraction. Pour tous entiers a, b et k, avec b et k non nuls :

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

On ne change pas la valeur d'une fraction en divisant son numérateur et son dénominateur par un même diviseur commun.

Méthode : rendre une fraction irréductible

1. Chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur (critères de divisibilité) et les diviser tous les deux par lui.
2. Recommencer tant qu'il reste un diviseur commun autre que 1.
3. Plus rapide : diviser d'un coup par le **plus grand diviseur commun**, trouvé en listant les diviseurs.

Exemple 9. Rendre la fraction $\frac{84}{126}$ irréductible.

Solution. Par étapes : 84 et 126 sont pairs, puis $4+2=6$ et $6+3=9$ sont des multiples de 3, puis 7 divise 14 et 21 :

$$\frac{84}{126} = \frac{42}{63} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

2 et 3 n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1 : $\frac{2}{3}$ est irréductible. D'un coup : le plus grand diviseur commun de 84 et 126 est 42, et $\frac{84}{126} = \frac{42\times 2}{42\times 3} = \frac{2}{3}$.

Exemple 10. Calculer $A = \frac{5}{6} + \frac{7}{15}$ et donner le résultat sous forme irréductible.

Solution. 30 est un multiple commun de 6 et de 15 :

$$A = \frac{5\times 5}{6\times 5} + \frac{7\times 2}{15\times 2} = \frac{25}{30} + \frac{14}{30} = \frac{39}{30} = \frac{3\times 13}{3\times 10} = \frac{13}{10}$$

13 et 10 n'ont pas d'autre diviseur commun positif que 1 : $A = \frac{13}{10}$ est écrite sous forme irréductible.